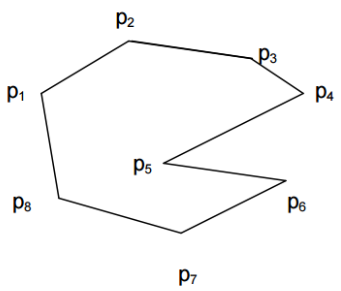
UNIDADE 3

GEOMETRIA PLANA E ESPACIAL

3.1 – REVISÃO DE GEOMETRIA PLANA

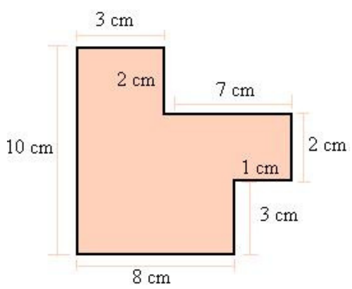
3.1.1 – Polígonos:

É uma figura no plano dada por pontos p_1, p_2, p_3, ...,p_n e segmentos de retas p_1p_2, p_2p_3, ..., $p_{n-1}p_n$, p_np_1



3.1.2 – Perímetros e áreas

3.1.2.1–Perímetro: é a soma dos lados de uma figura plana, por exemplo, o perímetro de um polígono é a soma dos tamanhos de seus lados.



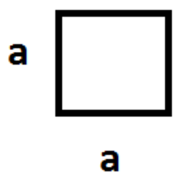
O perímetro da figura será:

$$P = 10 + 3 + 2 + 7 + 2 + 1 + 3 + 8$$

$$P = 36cm$$

3.1.2.2 – Área: é a superfície compreendida dentro de um perímetro, cuja unidade de medida mais conhecida (e mais utilizada) é o metro quadrado. Existem várias fórmulas para calcular a área das diversas figuras geométricas, como os triângulos, os quadriláteros, os círculos e as elipses.

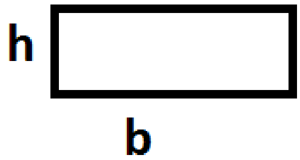
3.1.2.2.1 – Área do quadrado



$$A = a.a$$

$$A = a^2$$

3.1.2.2.2 – Área do retângulo

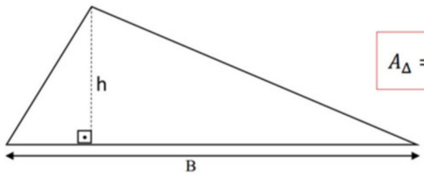


$$A = base.altura$$

$$A = b.h$$

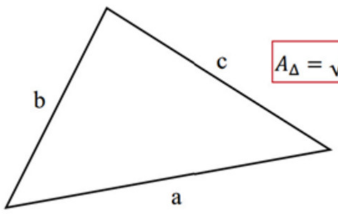
3.1.2.2.3 – Área do triângulo

a) Fórmula geral para área de um triângulo



$$A_{\Delta} = \frac{B.h}{2}$$

b) Área de um triângulo qualquer

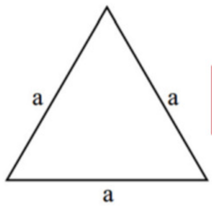


$$A_{\Delta} = \sqrt{p\,.(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

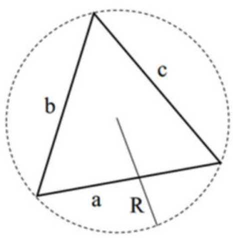
Obs.: onde p é o semi-perímetro do triângulo.

c) Área do triângulo equilátero



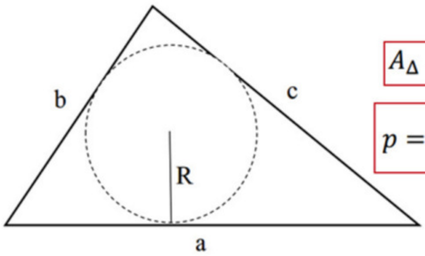
$$A_{\Delta} = \frac{a^2\,.\,\sqrt{3}}{4}$$

d) Área de um triângulo inscrito em uma circunferência de raio r



$$A_{\Delta} = \frac{a\,.\,b\,.\,c}{4R}$$

e)– Área de um triângulo circunscrito em uma circunferência de raio r

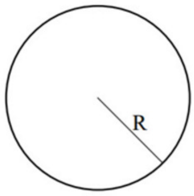


$$\boxed{A_\Delta = p\,.\,R}$$

$$\boxed{p = \frac{a+b+c}{2}}$$

Obs.: onde p é o semi-perímetro do triângulo.

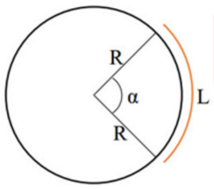
3.1.2.2.4 – Área e comprimento do círculo



$$\boxed{C = 2\,.\,\pi\,.\,R}$$

$$\boxed{A_O = \pi.R^2}$$

3.1.2.2.5 – Área do setor



$$\boxed{A_s = \frac{\alpha}{360^\circ}\,.\,\pi\,.\,R^2}$$

$$\boxed{A_s = \frac{l\,.\,R}{2}}$$

3.1.2.2.6 – Área do trapézio

$$A = \frac{(\text{Base menor} + \text{Base maior}) \times \text{Altura}}{2}$$

$$A = \frac{(B + b) \times h}{2}$$

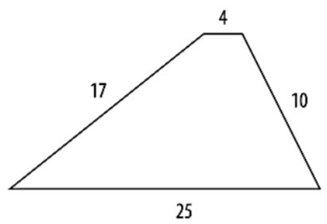
EXERCÍCIOS DA REVISÃO:

1) Dado um triângulo retângulo de catetos 5 e 12, calcule sua área.

2) Calcule a área de um triângulo equilátero de lado 2 cm.

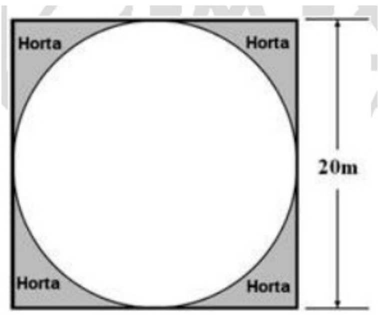
3) (UFC) Quantos azulejos quadrados, medindo 15 cm de lado, são necessários para revestir uma área retangular que mede 90 cm de comprimento por 120 cm de largura?

4) (Makenzie-SP) A área do trapézio da figura abaixo é:

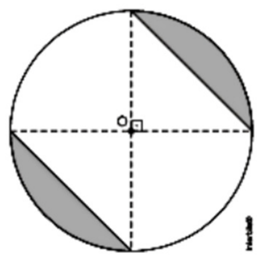


5) (IBMEC-SP) Uma pizzaria vende pizzas circulares com 32cm de diâmetro, divididas em oito pedaços iguais. O dono do estabelecimento pensou em criar uma pizza de tamanho maior, a ser divida em 12 pedaços iguais, de modo que a área de cada um deles seja igual a área do pedaço da pizza menor. Para isso, o diâmetro da pizza de 12 pedaços deve ser aproximadamente igual a?

6) (IFPE) No interior de uma creche há um grande pátio quadrado, onde foi construído um salão circular para que as crianças pudessem brincar livremente, conforme figura abaixo. A parte pintada da figura representa a área verde do pátio, onde os estudantes cultivam hortas. Determine a área total verde das hortas desse pátio, em metros quadrados. Considere π=3



7)(http://www.aridesa.com.br/servicos/click_professor/alexandrino_diogenes/2ano/solucao_areas.pdf)
Considere a circunferência da figura a seguir, com centro no ponto O e diâmetro igual a 4cm. Pode-se afirmar que o valor da área hachurada é:



a) $\sqrt{8}\pi - 4cm^2$

b) $2\pi cm^2$

c) $2\pi - 4cm^2$

d) $\pi - 1cm^2$

e) $4\pi - 2cm^2$

8) Um triângulo isósceles tem base medindo 8 cm e lados iguais com medidas de 5 cm. Qual é a área desse triângulo?

9) Qual a medida da área do quadrilátero ABCD ilustrado a seguir?

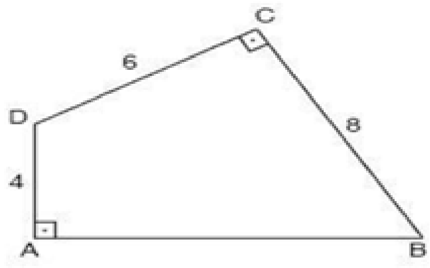
a) $4\sqrt{21} + 24$

b) 40

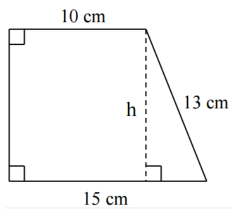
c) 42

d 44

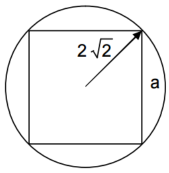
e) $6\sqrt{7} + 24$



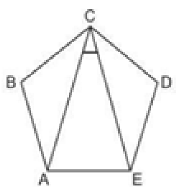
10) Qual é a área do trapézio retângulo cujas medidas, em centímetros, estão indicadas na figura?



11) Calcule área de um quadrado de lado *a* sabendo que o raio da circunferência circunscrita a esse quadrado mede $2\sqrt{2}cm$.

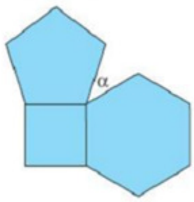


12) Condidere o pentágono regular ABCDE. Quanto valo o ângulo



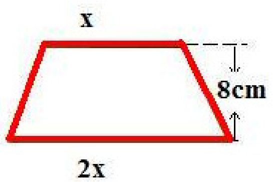
a) $24°$ b) $30°$ c) 36° d) $40°$ e) $45°$

13) A figura abaixo mostra um quadrado com um pentágono regular e um hexágono regular colados. O âgulo α mede:

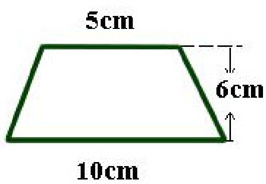


a) $40°$ b) $42°$ c) $44°$ d) $46°$ e) $48°$

14) Num trapézio de 8 cm de altura, a base maior é o dobro da base menor. Determine a medida dessas bases sabendo que a área desse trapézio é 180 cm2.



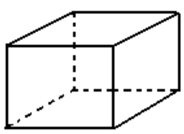
15)Calcule a área de um trapézio de bases medindo 10 cm e 5 cm e altura 6 cm.

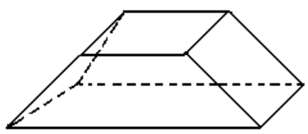


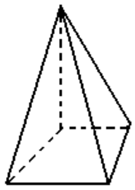
3.2–GEOMETRIA ESPACIAL

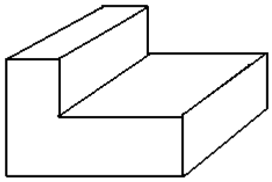
A Geometria espacial funciona como uma ampliação da Geometria plana e trata dos métodos apropriados para o estudo de objetos espaciais assim como a relação entre esses elementos. Os objetos primitivos do ponto de vista espacial são: pontos, retas, segmentos de retas, planos, curvas, ângulos e superfícies. Os principais tipos de cálculos que podemos realizar são: comprimentos de curvas, áreas de superfícies e volumes de regiões sólidas.

3.2.1 - Poliedros:
Chamamos de *poliedro* o sólido limitado por quatro ou mais polígonos planos, pertencentes a planos diferentes e que têm dois a dois somente uma aresta em comum. Veja alguns exemplos:



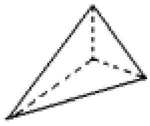
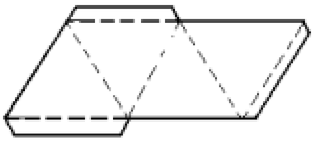
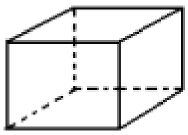
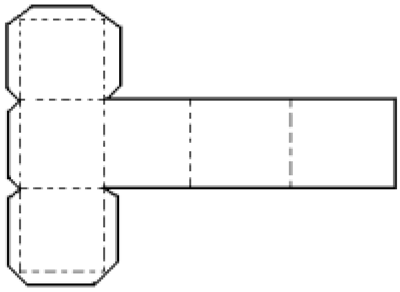
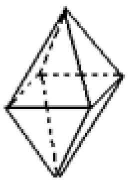
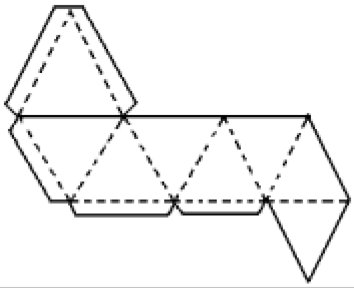
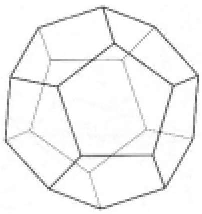
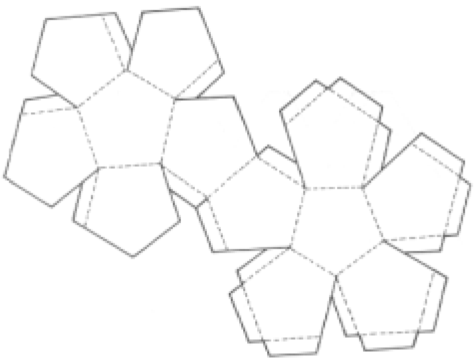


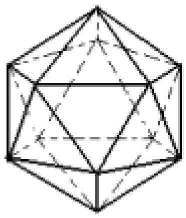
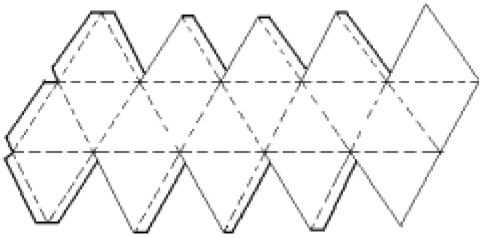




Os polígonos são as faces do poliedro; os lados dos polígonos são as arestas e os vértices do poliedro são as suas "quinas".

3.2.2 - Poliedros regulares:
Um poliedro é chamado de regular se suas faces são polígonos regulares, cada um com o mesmo número de lados e, para todo vértice, converge um mesmo número de arestas.
Existem cinco poliedros regulares:

Poliedro	**Planificação**	**Elementos**
 Tetraedro		4 faces triangulares 4 vértices 6 arestas
 Hexaedro		6 faces quadrangulares 8 vértices 12 arestas
 Octaedro		8 faces triangulares 6 vértices 12 arestas
 Dodecaedro		12 faces pentagonais 20 vértices 30 arestas

 Icosaedro		20 faces triangulares 12 vértices 30 arestas

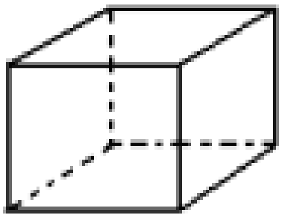
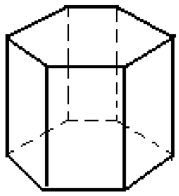
Fonte: www.estudokids.com.br

Exemplo:
Os centros das faces de um poliedro regular qualquer são vértices deum outro poliedro regular. Qual é o poliedro regular cujos vértices são o centro de um octaedro regular?

Um octaedro tem 8 faces, logo o poliedro procurado deve ter 8 vértice. Dentre os cinco únicos poliedros regulares, o único com 8 vértices é o hexaedro regular.

Relação de Euler
Em todo poliedro é válida a relação seguinte:
V - A + F = 2
em que **V** é o número de vértices, **A** é o número de arestas e **F**, o número de faces.

Exemplos:
Verifique a relação de Euler para os polígonos abaixo:

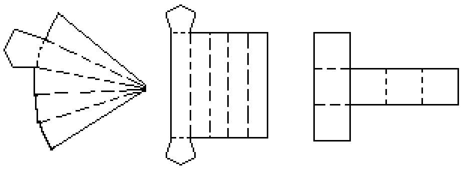
 V=8 A=12 F=6 8 - 12 + 6 = 2	 V = 12 A = 18 F = 8 12 - 18 + 8 = 2

Exemplo:
Um lapidador planeja dar a forma de um poliedro a uma pedra preciosa, de modo que o poliedro tenha vinte arestase todas as faces tenham o mesmo número de arestas.Para otimizar a reflexão interna da luz, o profissional deduz que , depois de lapidada ela tenha o máximo possível de faces. Quantos vértices terá a pedra lapidada?

Cada face divide uma aresta coma face vizinha, de modo que, para cada duas faces concorrentes temos uma aresta, deste modo, como são 20 restas devemos ter a metade de faces para o poliedro , logo A = 20 e F = 10. Aplicando a relação de Euler:
V – A + F = 2
V – 20 + 10 = 2
V – 10 = 2
V = 12

Exercícios:

1)Se dobrarmos convenientemente as linhas tracejadas das figuras a seguir, obteremos três modelos de figuras espaciais cujos nomes são:



a) tetraedro, octaedro e hexaedro.

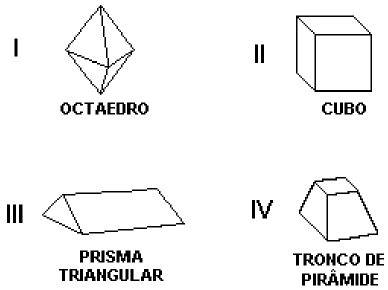
b) paralelepípedo, tetraedro e octaedro.

c) octaedro, prisma e hexaedro.

d) pirâmide, tetraedro e hexaedro.

e) pirâmide pentagonal, prisma pentagonal e hexaedro.

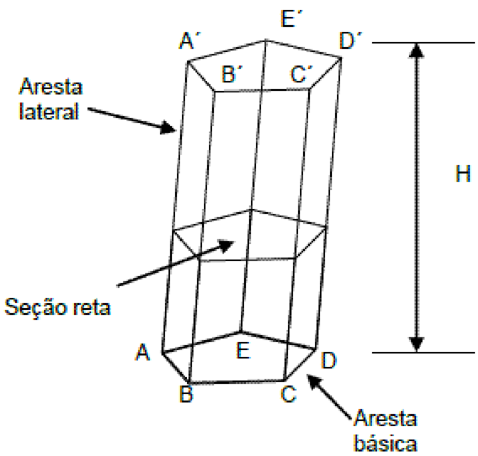
2)Indique quantas faces possuem, respectivamente, nessa ordem, os sólidos numerados como I, II, III e IV a seguir



3)Um poliedro convexo tem 14 vértices. Em 6 desses vértices concorrem 4 arestas, em 4 desses vértices concorrem 3 arestas e, nos demais vértices, concorrem 5 arestas. O número de faces desse poliedro é igual a:

3.2.3: Prismas:

Um **prisma** é todo poliedro formado por uma face superior e uma face inferior paralelas e congruentes (também chamadas de bases) ligadas por arestas. As laterais de um prisma são quadriláteros ou paralelogramos.

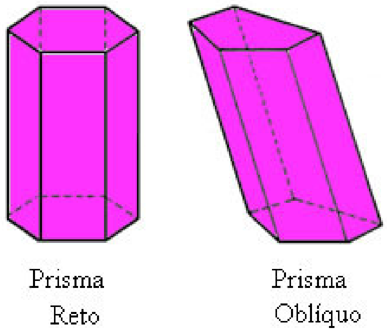


se inferior

base superior

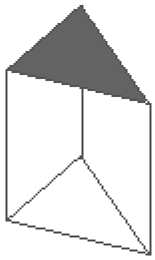
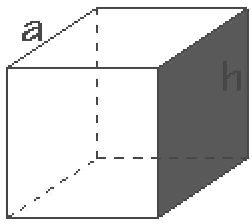
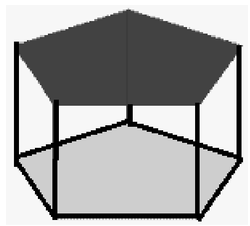
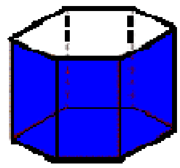
Fonte: http://www.estudofacil.com.br/prismas-caracteristicas-tipos-e-calculos-da-area-e-volume/

Um prisma pode ser:
- Reto: quando as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases;
- Oblíquo: quando as arestas laterais são oblíquas aos planos das bases



Fonte Http://brasilescola.uol.com.br/matematica/

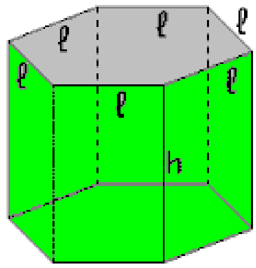
Quanto à *base*, os prismas mais comuns estão mostrados na tabela:

Prisma triangular	Prisma quadrangular	Prisma pentagonal	Prisma hexagonal
			
Base: Triângulo	Base: Quadrado	Base: Pentágono	Base:Hexágono

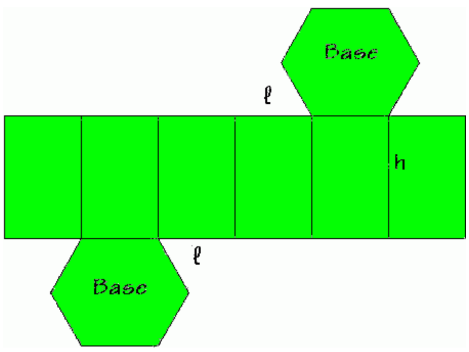
Fonte : Http://brasilescola.uol.com.br/matematica/

3.2.4 - Área de um prisma:

Tomemos o prisma hexagonal da figura:



As faces laterais e as bases formam a envoltória deste sólido. Esta envoltória é uma "superfície" que pode ser planificada no plano cartesiano. Tal planificação se realiza como se cortássemos com uma tesoura esta envoltória exatamente sobre as arestas para obter uma região plana formada por áreas congruentes às faces laterais e às bases. A planificação é útil para facilitar os cálculos das áreas laterais e da área total:



da base) + n.ı.h

Fonte: Http://brasilescola.uol.com.br/matematica/

Onde :

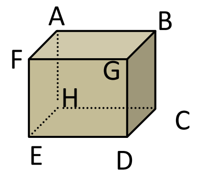
- n é o número de lados do polígono da base
- l é a comprimento do lado do polígono
- h é a altura do prisma

3.2.5 - Volume de um prisma :

é dado por:

$$\boxed{V_{(prisma)} = A_{(área\ da\ base)}.h_{(altura)}}$$

3.2.6 – Exemplos com os Prismas mais comuns:

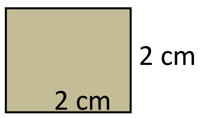


3.2.6.1 – Cubo

No desenho do cubo de aresta 2cm

a) calcule a área externa total

Num cubo todas as arestas são de mesmo comprimento, logo, tomemos uma face:



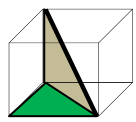
A = base X altura =2cm x 2 cm = 4 cm^2

Para as 6 faces iguais : A_{TOTAL} = 6x4 cm^2 = 24 cm^2

b) calcule o volume interno

A área da base CDEH é de 4 cm^2 a altura pela aresta BC por exemplo é 2cm

V = 4 cm^2 x 2 cm = 4x2 cm^3 = 8 cm^3



c) calcule o comprimento da diagonal AD

Note na figura que ADH formam um triangulo retângulo

$$AD^2 = AH^2 + HD^2$$

AH = 2 cm

Precisamos calcular o valor de HD^2, mas note que HDEH também formam um triangulo retângulo.

$$HD^2 = DE^2 + EH^2 = (2\ cm)^2 + (2cm)^2 = 4\ cm^2 + 4\ cm^2 = 8\ cm^2$$

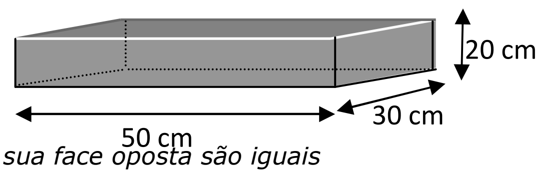
Sendo assim:

$$AD^2 = AH^2 + HD^2 = (2\ cm)^2 + \ 8cm^2 = 4\ cm^2 + 8cm^2 = 12cm^2$$
$$AD = \sqrt{12cm^2} = \sqrt{12}\ cm$$

3.2.6.2 – Paralelepípedo

Na figura de um paralelogramo possui lados medindo 50 cm, 20 cm e 30 cm, calcule:

a) A área total da superfície



O objeto tem 6 faces sendo que cada fase e sua face oposta são iguais
Área= comprimento x largura:
A_{BASE} =50 cm x 30 cm = 1500 cm^2
Área da face frontal: $A_{FRONTAL}$ = 50 cm x 20 cm = 1000 cm^2
Área da face lateral: A_{LAT} =30m x20 cm = 600 cm^2

Área total da superfície: $A_{TOTAL} = 2x\ A_{BASE} + 2x\ A_{FRONTAL} = 2x\ A_{LAT} = 2 \times 1500\ cm^2 + 2 \times 1000cm^2 + 2 \times 600\ cm^2$
$ATOTAL = 3000\ cm^2 + 2000\ cm^2 + 1200\ cm^2 = 6200\ cm^2$

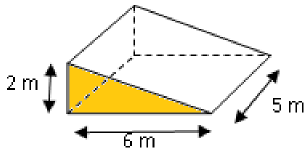
b) O volume ocupado pelo objeto.

Volume = (Área da base) x (altura)
$A_{BASE} = 1500\ cm^2$
$h = 20\ cm$
$V = A_{BASE} \times h = 1500\ cm^2 \times 20\ cm = 30000\ cm^3$

3.2.6.3 – prisma reto.

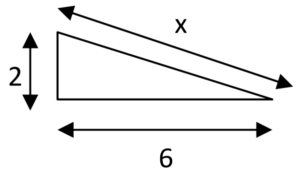
1) prisma triangular reto

Na figura, um prisma tem como base um triângulo retângulo. Determine



a) O comprimento do lado correspondente à hipotenusa da face da base da figura

No triângulo retângulo, aplicamos o teorema de Pitágoras:



$$x^2 = 2^2 + 6^2 = 4 + 36 = 40$$

$$x = \sqrt{40}m$$

b) A área total externa

Há 5 faces na figura: duas bases iguais, uma face no plano horizontal A_1, uma face no plano vertical A_2 e uma face diagonal A_3 .

$A_{TOTAL} = 2x\ A_{BASE} + A_1 + A_2 + A_3$

A_{BASE} = Área de um triângulo: $\frac{base\ x\ altura}{2}$

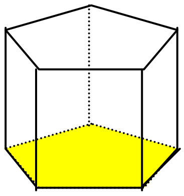
$A_{BASE} = \frac{6 \cdot 2}{2} = 6m^2$
$A_1 = 6 \times 5 = 30\ m^2$
$A_2 = 5 \times 2 = 10\ m^2$
$A3 = \sqrt{40} \times 5 = 5\sqrt{40}m^2$
$A_{TOTAL} = 2 \times 6 + 30 + 10 + 5\sqrt{40} = 12 + 30 + 10 + 5\sqrt{40}$
$A_{TOTAL} = (52 + 5\sqrt{40})m^2$

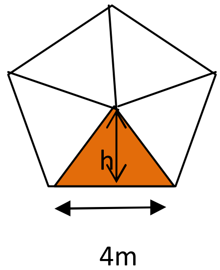
c) O volume ocupado pelo prisma.

Volume = (Área da base) x (altura)
$V = 6\ m^2 \times 5\ m = 30\ m^3$

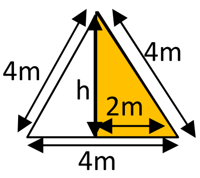
2) prisma pentagonal reto

Cinco triângulos equiláteros de lado 4m justapostos formam a base de um prisma hexagonal de altura 7 m:





a) Determine a altura de cada triângulo



No triângulo retângulo destacado, usamos o teorema de Pitágoras:

$$4^2 = 2^2 + h^2$$

$$16 = 4 + h^2$$

$$h^2 = 12$$

$$h = \sqrt{12}\, m$$

b) Calcule a área da base do prisma

$A_{BASE} = 5 \times A_{TRIANGULO}$

$$A_{BASE} = 5 \cdot \left(\frac{4 \cdot \sqrt{12}}{2}\right) = 10 \cdot \sqrt{12} m^2$$

c) Calcule a área total da superfície do prisma

Área total = 2x(área da base) + n.l.h

$$A_{TOTAL} = 2 \cdot \left(10 \cdot \sqrt{12}\right) + 5 \cdot 4 \cdot 7 = \left(20\sqrt{12} + 140\right) m^2$$

d) Calcule o volume do prisma

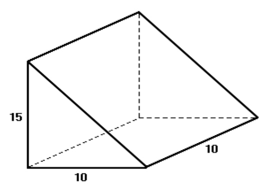
V = A_{BASE} x altura

$$V = \left(10 \cdot \sqrt{12}\right) \cdot 7 = 70 \cdot \sqrt{12} m^3$$

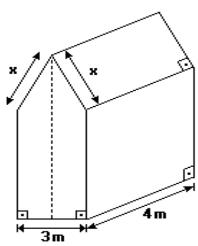
Exercícios:

4)Dado um prisma hexagonal regular, sabe-se que sua altura mede 3cm e que sua área lateral é o dobro da área de sua base. Qual é o volume deste prisma, em cm^3?

5)De uma viga de madeira de seção quadrada de lado L=10cm extrai-se uma cunha de altura h=15cm, conforme a figura. Qual é o volume da cunha?



6) (Puccamp) Considere uma barraca de lona projetada de acordo com as indicações da figura a seguir. Ela deve medir 4m de comprimento 3m de largura. As faces laterais devem ter 2m de altura e a altura total da barraca deve ser 3m. O piso da barraca também é feito de lona. Nessa barraca, a superfície total da lona utilizada será:

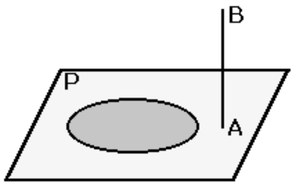


3.2.7 – Cilindro:

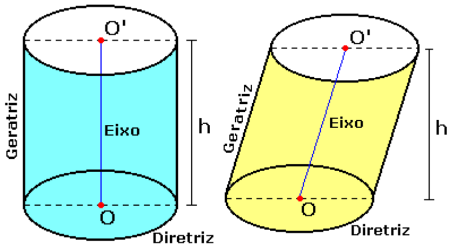
No dia a dia encontramos aplicações intensas do uso de cilindros. Panelas, canos d'água, latas,... Todos eles com formas cilíndricas.

Fonte: https://www.hubo.be

Seja P um plano e nele vamos construir um círculo de raio r e tomemos também um segmento de reta AB que não seja paralelo ao plano P e nem esteja contido neste plano P. Um cilindro circular é a reunião de todos os segmentos congruentes e paralelos a AB com uma extremidade no círculo.

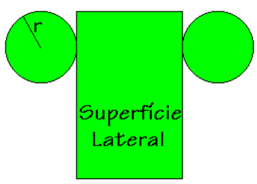


Em um cilindro, podemos identificar vários elementos, conforme notamos nos cilindros reto e oblíquos abaixo:



Fonte: Http://brasilescola.uol.com.br/matematica/

1. **Base**: É a região plana contendo a curva diretriz e todo o seu interior. Num cilindro existem duas bases.
2. **Eixo**: É o segmento de reta que liga os centros das bases do "cilindro".
3. **Altura**: A altura de um cilindro é a distância entre os dois planos paralelos que contêm as bases do "cilindro".
4. **Superfície Lateral**: É o conjunto de todos os pontos do espaço, que não estejam nas bases, obtidos pelo deslocamento paralelo da geratriz sempre apoiada sobre a curva diretriz.
5. **Superfície Total**: É o conjunto de todos os pontos da superfície lateral reunido com os pontos das bases do cilindro.
6. **Área lateral**: É a medida da superfície lateral do cilindro.



Na figura ao lado, planificamos um cilindro reto. Note que o comprimento da base da superfície lateral corresponde à circunferência de raio r da Diretriz:

$$A_{LATERAL} = 2 \cdot \pi \cdot r . h$$

7. **Área total**: É a medida da superfície total do cilindro. Além da superfície lateral, temos as duas bases do cilindro fechando a superfície lateral embaixo e encima:

$$\boldsymbol{A_{TOTAL} = A_{LATERAL} + 2 \cdot A_{BASE}}$$

$$\boldsymbol{A_{TOTAL} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2 = 2 \cdot \pi \cdot r(h + r)}$$

8. **Volume**: É a medida do espaço contido pela superfície cilíndrica total.

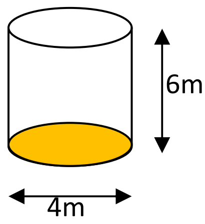
$$\boldsymbol{V = A_{BASE} \cdot h}$$

$$\boldsymbol{V = \pi \cdot r^2 \cdot h}$$

Exemplo:

No desenho cilíndrico de diâmetro 4 m e altura 6m, calcule

a) a área da base



O raio é a metade do diâmetro

$A_{BASE} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$

$\pi = 3{,}14$

$A_{BASE} = 4 \cdot 3{,}14 = 12{,}56\ m^2$

b) a área a superfície total do cilindro

$$\boldsymbol{A_{TOTAL} = 2 \cdot \pi \cdot r(h + r)}$$

$$A_{Total} = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot (6 + 2) = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 8 = 32 \cdot \pi = 32 \cdot 3{,}14 = 110{,}53\ m^2$$

c) O volume do cilindro

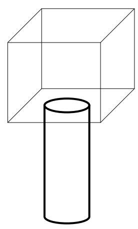
$\boldsymbol{V = \pi \cdot r^2 \cdot h}$

$V = \pi \cdot 2^2 \cdot 6 = \pi \cdot 4 \cdot 6 = 24 \cdot \pi = 75{,}39\ m^3$

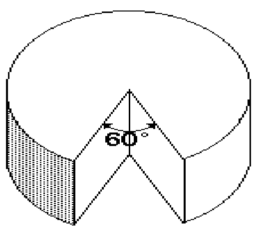
Exercícios:

7)A uma caixa d'água de forma cúbica com 1 metro de lado, está acoplado um cano cilíndrico com 4cm de diâmetro e 50m de comprimento. Num certo instante, a caixa está cheia de água e o cano vazio. Solta-se a água pelo cano até que fique cheio. Qual o valor aproximado da altura da água na caixa no instante em que o cano ficou cheio?

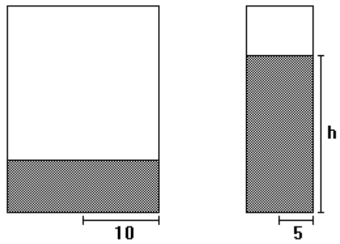
a) 90 cm.
b) 92 cm.
c) 94 cm.
d) 96 cm.
e) 98 cm.



8) (UFPE) Um queijo tem a forma de um cilindro circular reto com 40cm de raio e 30cm de altura. Retira-se do mesmo uma fatia, através de dois cortes planos contendo o eixo do cilindro e formando um ângulo de 60°. Se V é o volume, em cm^3, do que restou do queijo (veja a figura a seguir), determine V.

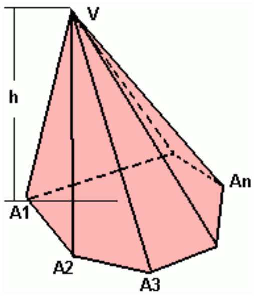


9) (PUC-MG)Dois recipiente cilíndricos têm altura de 40 cm e raios da base medindo 10 cm e 5 cm. O maior deles contém água até 1/5 de sua capacidade. Essa água é despejada no recipiente menor, alcançando a altura h, de



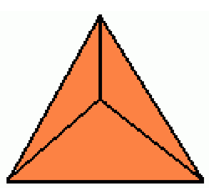
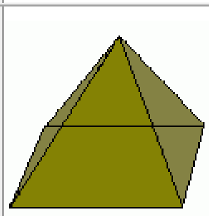
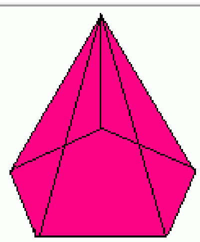
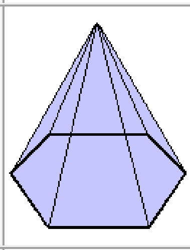
3.2.8 – Pirâmide:

Consideremos um polígono contido em um plano (por exemplo, o plano horizontal) e um ponto V localizado fora desse plano. Uma pirâmide é a reunião de todos os segmentos que têm uma extremidade em P e a outra num ponto qualquer do polígono.



Na figura, O ponto V recebe o nome de vértice da pirâmide. Os Pontos A1, A2, ...An formam a base da pirâmide, que determina o tipo de pirâmide:

Fonte: Http://brasilescola.uol.com.br/matematica/

triangular	Quadrangular	pentagonal	hexagonal
			
Base: triângulo	Base: quadrado	Base: pentágono	Base: hexágono

Fonte : Http://brasilescola.uol.com.br/matematica/

Os casos acima tratam de pirâmides regulares retas, nas quais as bases são polígonos regulares e a projeção ortogonal do vértice V sobre o plano da base coincide com o centro da base.

Área Lateral de pirâmide: dependendo da forma poligonal da base, a pirâmide terá determinado número de faces laterais. Para uma pirâmide reta com base de formato de polígono regular de n lados, as faces laterais serão todas iguais. A área lateral é

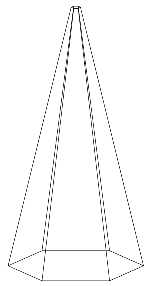
$$A_{LATERAL} = n \cdot A_{FACE}$$

Área total de pirâmide: Consiste na soma da área lateral e área da base.

$$A_{TOTAL} = A_{BASE} + A_{LATERAL}$$

Volume de pirâmide: É a medida do espaço contido pela superfície da pirâmide:

$$\boldsymbol{V = \frac{A_{BASE} \cdot h}{3}}$$

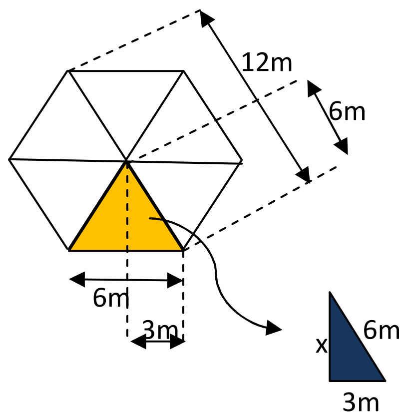


Exemplo:

Uma pirâmide hexagonal, cuja base tem lados que medem 6m e altura de 20m é mostrada na figura ao lado. Determine:

a) A área da base

O hexágono da base pode ser formado por 6 triângulo equiláteros de lado 6m, como na figura.



Determinando a altura x, seremos capazes de calcular a área de um triangulo equilátero e a área da base será

A_{BASE} = 6 x $A_{TRIANGULO}$

$$6^2 = x^2 + 3^2$$

36 = x^2 + 9

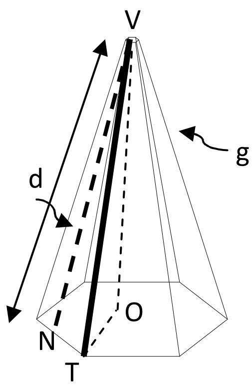
x^2 = 36 – 9 = 27

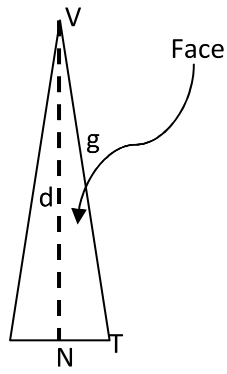
x =$\sqrt{27} = 5{,}19$

Logo : $A_{BASE} = 6 \cdot \left(\frac{6 \cdot 5{,}19}{2}\right) = 93{,}42$ m^2

b) A área da superfície lateral

Para determinar a área de uma face precisamos saber o valor de g e d na figura abaixo.





No triângulo VOT:

$g^2 = 6^2 + 20^2$
g^2 = 36 + 400
g^2 = 436
g = $\sqrt{436} = 20{,}88$

Triângulo VTN:
$20{,}88^2 = 3^2 + d^2$
d^2 =436 – 9 = 427
d =$\sqrt{427} = 20{,}66$

$$A_{TRIANGULO} = \frac{6 \cdot 20{,}66}{2} = 61{,}98\, m^2$$

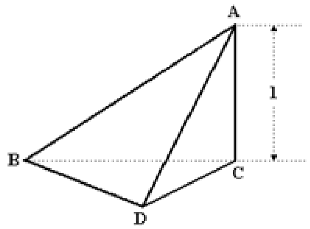
Portanto, como temos 6 faces triangulares : $A_{LATERAL}$ = 6 x $A_{TRIANGULO}$ = 6 x 61,98m^2 = 371,88 m^2

c) O Volume:

$$V = \frac{A_{BASE} \cdot h}{3} = \frac{93{,}42 \cdot 20}{3} = 622{,}8\, m^3$$

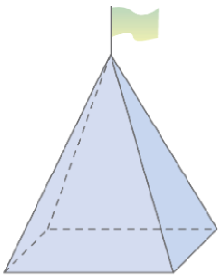
Exercícios:

10) (Mackenzie) Qual é o volume do sólido da figura a seguir:



DADOS: $\begin{cases} C\hat{A}B = D\hat{A}C = 30° \\ B\hat{C}D = 60° \\ \overline{AC} \perp \overline{DC} \end{cases}$

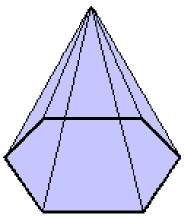
11)(VUNESP) O prefeito de uma cidade pretende colocar em frente à prefeitura um mastro com uma bandeira, que será apoiado sobre uma pirâmide de base quadrada feita de concreto maciço, como mostra a figura.



Sabendo-se que a aresta da base da pirâmide terá 3 m e que a altura da pirâmide será de 4 m, o volume de concreto (em m³) necessário para a construção da pirâmide será:

a) 36 b) 27 c) 18 d) 12 e) 4

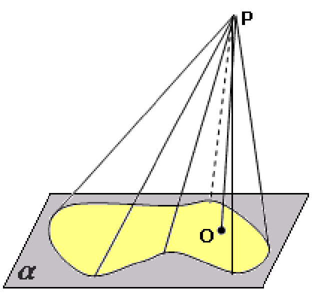
12)As faces laterais de uma pirâmide hexagonal regular são triângulos isósceles com área de 12cm² cada.A área lateral do sólido vale:



a) 36cm²
b) 48cm²
c) 54cm²
d) 72cm²
e) 108cm²

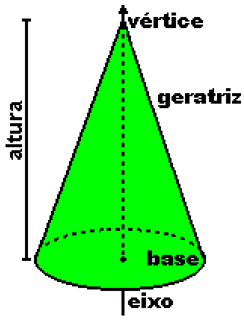
3.2.9 – Cone:

Considere uma região plana limitada por uma curva suave (sem quinas), fechada e um ponto P fora desse plano. Denominamos cone ao sólido formado pela reunião de todos os segmentos de reta que têm uma extremidade em um ponto P (vértice) e a outra num ponto qualquer da curva definida no plano.



Fonte: Http://brasilescola.uol.com.br/matematica/

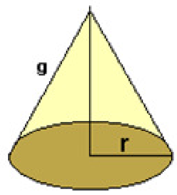
Cone circular reto: É aquele cuja base é uma curva circular e cujo vértice situa-se perpendicular ao centro da base. Em um cone, podem ser identificados vários elementos:



Http://brasilescola.uol.com.br/matematica/

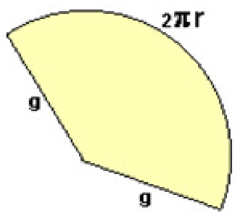
1- Vértice (V) de um cone é o ponto P, onde concorrem todos os segmentos de reta contidos na lateral do cone.
2- Base de um cone é a região plana contida no interior da curva, inclusive a própria curva.
3- Eixo do cone éo segmento de reta que passa pelo vértice P e pelo centro da base.
4- Geratriz(g)é qualquer segmento que tenha uma extremidade no vértice do cone e a outra na curva que envolve a base.
5- Altura(h) é a distância do vértice do cone ao plano da base.
6-Superfície lateral de um cone é a reunião de todos os segmentos de reta que tem uma extremidade em P e a outra na curva que envolve a base.
7- Superfície do cone é a reunião da superfície lateral com a superfície base do cone que é o círculo.

Em um cone circular reto, todas as geratrizes são congruentes entre si. Se g é a medida da geratriz, r é o raio da circunferência e h é a altura então, pelo Teorema de Pitágoras, na figura ao lado:



Temos: $\boxed{g^2 = r^2 + h^2}$

Área lateral do cone: Se fizermos um corte sobre uma geratriz do cone, obtemos a seguinte figura:



$$\boxed{A_{LATERAL} = \pi \cdot r \cdot g}$$

Fonte: Http://brasilescola.uol.com.br/matematica/

Área total do cone: Área lateral + área da base. Para um cone circular:

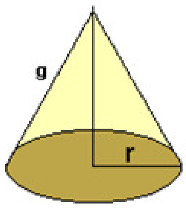
$$A_{TOTAL} = \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2 = \pi \cdot r(g + r)$$

Volume do Cone: É a medida do espaço contido no interior de uma superfície cônica.

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

Exemplo:

No cone circular reto de 12 cm de raio e 16 cm de altura, calcule



a) O valor da geratriz g

$$g^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400 g = \sqrt{400} = 20\ cm$$

b) A área da base

$$A_{BASE} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 12^2 = 144 \cdot \pi = 452{,}38\ cm^2$$

c) A área lateral

$$A_{LATERAL} = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 12 \cdot 20 = 240 \cdot \pi = 753{,}98\ cm^2$$

d) A área total

A_{TOTAL} = 452,38 + 753,98 = 1206,36 cm^2

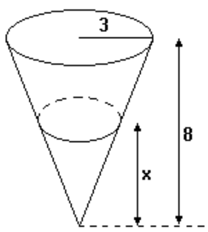
e) O volume

$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{2} = \frac{\pi \cdot 12^2 \cdot 16}{2} = \frac{\pi \cdot 144 \cdot 16}{2} = 3619{,}11\ cm^3$

Exercícios:

13)Um pedaço de cartolina possui a forma de um semicírculo de raio 20cm. Com essa cartolina um menino constrói um chapéu cônico e o coloca com a base apoiada sobre uma mesa. Qual a distância do bico do chapéu à mesa?Dica: com um semicírculo se origina um cone equilátero (g = 2r).

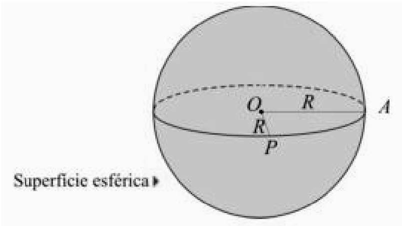
14)Um copo tem a forma de um cone com altura 8cm e raio da base 3cm. Queremos enchê-lo com quantidades iguais de suco e de água. Para que isso seja possível qual deve ser a altura x atingida pelo primeiro líquido?



15)Um cone circular reto tem altura de 8cm e raio da base medindo 6cm. Qual é, em centímetros quadrados, sua área lateral?

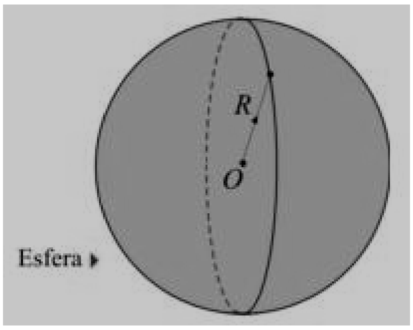
3.3 – Esfera:

3.3.1 - Superfície esférica de centro O, é o conjunto de pontos do espaço cuja distância a O, denominado Origem ou Centro da esfera é sempre iguala uma distância fixa R, denominada Raio da esfera.



Fonte: Http://brasilescola.uol.com.br/matematica/

Esfera é o conjunto de pontos do espaço cuja distância a O é igual ou menor que o raio R.



Fonte: Http://brasilescola.uol.com.br/matematica/

3.3.2 - Área da superfície esférica

A área da superfície esférica de raio R é dada por:

$$\boxed{A = 4 \cdot \pi \cdot R^2}$$

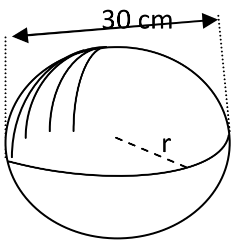
3.3.3 - Volume da esfera

O volume da esfera de raio R é dado por:

$$\boxed{V = \frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3}}$$

Exemplo:

Calcule a área externa e o volume ocupado pela esfera de 30 cm de diâmetro.



O raio é a metade do diâmetro

$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 15^2 = 4 \cdot 225 \cdot \pi = 900 \cdot \pi$ =2827,43cm^2

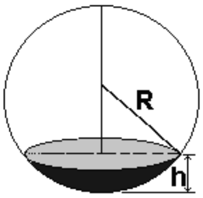
$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 15^3}{3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 3375}{3} = \frac{13500 \cdot \pi}{3} = 14137{,}16\ cm^3$$

3.3.4 - Objetos Esféricos:

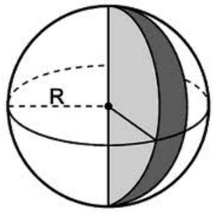
Hemisfério: é a metade de uma esfera:

Zona esférica:

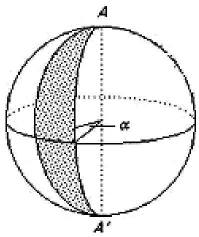
Calota esférica:



Cunha esférica:



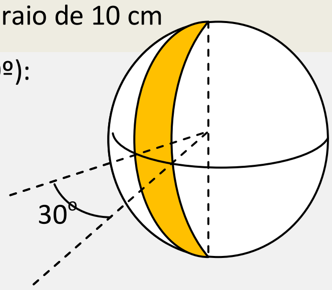
Fuso esférico:



Fonte : http://www.uel.br/projetos/matessencial/geometria/esfera/esfera.htm

Exemplo

Calcule a área do fuso esférico cujo Ângulo de abertura é 30º e raio de 10 cm



Comparando 30º como ângulo da circunferência completa (360º):

$$\frac{30^o}{360^o} = \frac{1}{12}$$

Logo a área do fuso é 1/12 da área da esfera:

$$A_{FUSO} = \frac{A_{ESFERA}}{12} = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^2}{12} =$$

$$= \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^2}{12} = \frac{400 \cdot \pi}{12} = 104{,}71cm^2$$

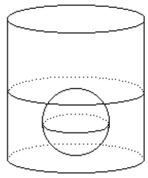
Fonte: www.exatas.ufpr.b

Exercícios:

16)Aumentando em 10% o raio de uma esfera a sua superfície aumentará:

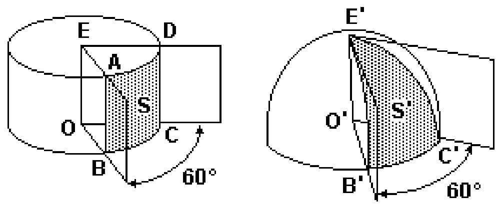
a) 21 %.b) 11 %. c) 31 %.d) 24 %. e) 30 %.

17) (UFRGS) Uma esfera de raio 2 cm é mergulhada num copo cilíndrico de 4 cm de raio, até encostar no fundo, de modo que a água do copo recubra exatamente a esfera



Qual era a altura de água antes da esfera ser colocada no copo?

18) (UFF2002) Considere duas superfícies S=ABCD e S'=E'B'C' obtidas, respectivamente, pelas interseções de um cilindro circular reto e de uma semiesfera com semiplanos que formam um ângulo diedro de 60°, conforme as figuras a seguir.



do cilindro
dro
do cilindro
esfera

Sendo área(S) a área da superfície S e área(S') a área da superfície S', calcule o valor de área(S)/área(S').

19) Derretendo uma peça maciça de ouro de forma esférica, quantas peças da mesma forma se pode confeccionar com este ouro, se o raio das novas peças é um terço do raio da anterior? Admita que não houve perda de ouro durante o derretimento.

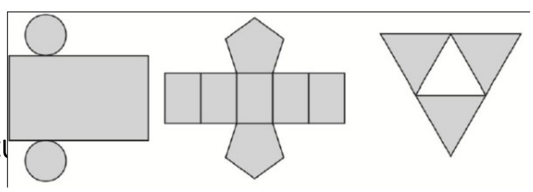
EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) Considere uma laranja como uma esfera composta de 12 gomos exatamente iguais. Se a laranja tem 8 cm de diâmetro, qual é o volume de cada gomo?

2) (ENEM) A figura seguinte mostra um modelo de sombrinha muito usado em países orientais.

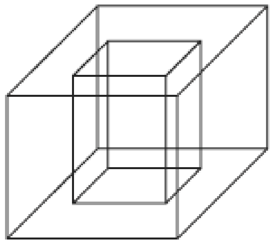
Esta é uma representação de uma superfície de revolução chamada de
a) pirâmide
b) semiesfera
c) cilindro
d) tronco de cone
e) cone

3) (ENEM) Maria quer inovar sua loja de embalagens e decidiu vender caixas com diferentes formatos. Nas imagens apresentadas estão as planificações dessas caixas.



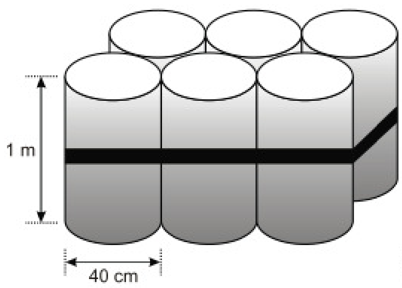
Quais serão os sólidos geométricos que Maria obterá a partir dessas planificações?
a) Cilindro, prisma de base pentagonal e pirâmide
b) Cone, prisma de base pentagonal e pirâmide
c) Cone, tronco de pirâmide e prisma
d) Cilindro, tronco de pirâmide e prisma
e) Cilindro, prisma e tronco de cone

4) (ENEM) Um porta-lápis de madeira foi construído no formato cúbico, seguindo o modelo ilustrado a seguir. O cubo de dentro é vazio. A aresta do cubo maior mede 12 cm e a do cubo menor, que é interno, mede 8 cm.



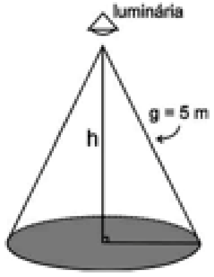
O volume de madeira utilizado na confecção desse objeto foi de
a) 12 cm^3
b) 64 cm^3
c) 96 cm^3
d) 1 216 cm^3

5) (ENEM) O administrador de uma cidade, implantando uma política de reutilização de materiais descartados, aproveitou milhares de tambores cilíndricos dispensados por empresas da região e montou *kits* com seis tambores para o abastecimento de água em casas de famílias de baixa renda, conforme a figura seguinte. Além disso, cada família envolvida com o programa irá pagar somente R$ 2,50 por metro cúbico utilizado.



Uma família que utilizar 12 vezes a capacidade total do *kit* em um mês pagará a quantia de (considere π=3).
a) R$ 86,40
b) R$ 21,60
c) R$ 8,64
d) R$ 7,20
e) R$ 1,80

6) (ENEM) Um arquiteto está fazendo um projeto de iluminação de ambiente e necessita saber a altura que deverá instalar a luminária ilustrada na figura.



Sabendo-se que a luminária deverá iluminar uma área circular de 28,26 m^2, considerando π=3,14, a altura h será igual a:
a) 3 m
b) 4 m
c) 5 m
d) 9 m
e) 16 m

7) (ENEM) Uma carga de 100 contêineres, idênticos ao modelo apresentado na Figura 1, deverá ser descarregada no porto de uma cidade. Para isso, uma área retangular de 10 m por 32 m foi cedida para o empilhamento desses contêineres (Figura 2).

Figura 1

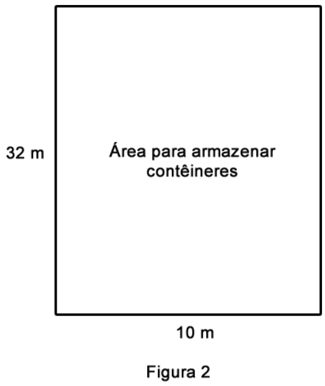
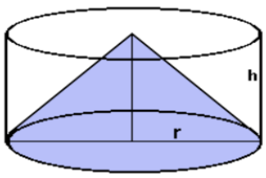


Figura 2

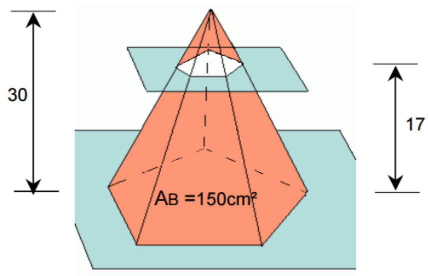
De acordo com as normas desse porto, os contêineres deverão ser empilhados de forma a não sobrarem espaços nem ultrapassarem a área delimitada.
Após o empilhamento total da carga e atendendo à norma do porto, a altura mínima a ser atingida por essa pilha de contêineres é

a) 12,5m b) 17,5m c) 25,0m d) 22,5m e) 32,5m

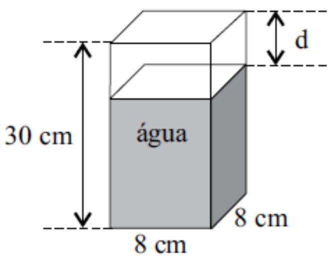
8) As áreas das bases de um cone circular reto e de um prisma quadrangular reto são iguais. O prisma tem altura 12cm e volume igual ao dobro do volume do cone Determine a altura do cone.



9) Uma pirâmide tem a altura medindo 30cm e área de base igual a $150cm^2$. Qual é a área da seção superior do tronco desta pirâmide, obtido pelo corte desta pirâmide por um plano paralelo à base da mesma, sabendo-se que a altura do tronco da pirâmide é 17cm?



10) (CTSB) Em uma jarra de fundo quadrado, medindo 8 cm de lado e 30 cm de altura, foram despejadas 5 canecas, todas contendo 320 ml de água, fazendo com que a jarra não ficasse totalmente cheia, conforme mostra a figura.

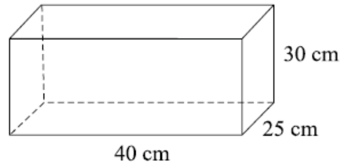


A distância d, em cm, entre o nível da água na jarra e a borda superior é

a) 6 b) 5

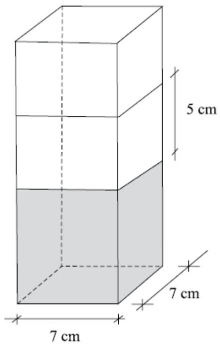
c) 4 d) 3
e) 2

11) (PMMC) Maria vai cobrir com papel todas as faces da caixa de papelão que tem a forma de um paralelepípedo. A quantidade mínima necessária de papel é



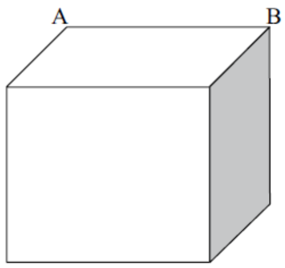
a) 2 500 cm²
b) 3 300 cm²
c) 4 000 cm²
d) 4 300 cm²
e) 5 900 cm²

12) (CASA) Flávio ingeriu uma certa quantidade do suco contido em um recipiente com a forma de um prisma reto, mostrado na figura, e o nível do suco no recipiente baixou 5 cm. A quantidade de suco ingerida por Flávio foi, em ml, igual a:



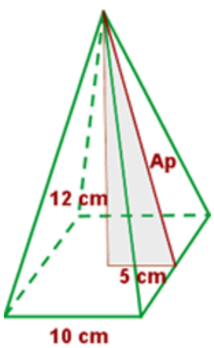
a) 185
b) 200
c) 210
d) 225
e) 245

13) (SEAP) A distância entre os vértices A e B do cubo é de 6 cm. A área total desse cubo e seu volume são, respectivamente:

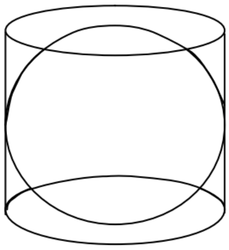


a) 108 cm² e 36 cm³.
b) 124 cm² e 72 cm³.
c) 150 cm² e 100 cm³.
d) 178 cm² e 108 cm³.
e) 216 cm² e 216 cm³.

14) Calcule a área lateral, total e o volume de uma pirâmide quadrangular de 10 cm de aresta e 12 cm de altura.



15) Calcule a área total e o volume do cilindro circular da figura abaixo, sabendo que o raio da esfera inscrita mede 3cm.



16) Um tanque em forma de paralelepípedo tem por base um retângulo horizontal de lados 0,8 m e 1,2 m. Um individuo, ao mergulhar completamente no tanque, faz o nível da água subir 0,075m. Então o volume do individuo , em litros, é:

17) Se o apótema de uma pirâmide mede 17m e o apótema da base mede 8m, qual é a altura da pirâmide?

18) Calcular a área lateral de uma pirâmide quadrangular regular que tem 12cm de altura e 40cm de perímetro da base.

GABARITO DA REVISÃO DE GEOMETRIA PLANA

1) 30	2) $\sqrt{3}$	3) 48	4) 116	5) 40cm	6) $100m^2$
7) C	8) $12cm^2$	9) A	10) 150	11) $16m^2$	12) C 13) B
14) 15cm e 30 cm		15) $45cm^2$			

GABARITO GEOMETRIA ESPACIAL

1) E
2) 8, 6, 5, 6
3) 16
4) $54\sqrt{3}$
5) 750
6) C
7) C
8) $V = 40 \cdot 10^3 \cdot \pi$
9) A
10)$\sqrt{3}$/36.
11)D
12) D
13) $10\sqrt{3}$ cm
14)$4\sqrt[3]{4}$cm
15)60π
16) A
17) 10/3 cm
18) 1
19) 27

GABARITO EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1)$Vgomo = \frac{V\ total}{12} = \frac{64.\pi}{9} cm^3$
2) E
3) A
4) D
5) B
6) B
7)A
8)h=18cm
9)A_s=$28,17cm^2$
10) B
11) E
12) E
13) E
14)$A_L = 260cm^2$
$A_T = 360cm^2$
$V = 400cm^3$
15): A = 54π. V = 108π

16) 72 litros
17) 15m
18) 260cm^2

Referências bibliográficas:

- DANTE. Matemática. Contexto e Aplicações. Volume único. Editora Ática. 2004.
- GIOVANNI, José Ruy. BONJORNO, José Roberto. Matemática-uma nova abordagem. Editora FTD, 2000. Vol. 1,2,3.
- SMOLE, Kátia Stocco. Matemática. Ensino Médio. Vol. I, II, III. Ed. Saraiva, 2003.
- SOUZA, Joamir, Matemática-Novo Olhar. Ensino Médio. Vol. 1, 2, 3. Ed. FTD. 2010.
- https://www.educacao.mg.gov.br/politica-de-privacidade/page/15089-supletivo
- www.estudokids.com.br
- http://www.estudofacil.com.br/prismas-caracteristicas-tipos-e-calculos-da-area-e-volume/
- Http://brasilescola.uol.com.br/matematica/
- http://www.uel.br/projetos/matessencial/geometria/esfera/esfera.htm
- https://www.hubo.be
- http://www.aridesa.com.br/servicos/click_professor/alexandrino_diogenes/2ano/solucao_areas.pdf
- Fonte: www.exatas.ufpr.b