UNIDADE 4

TRIGONOMETRIA

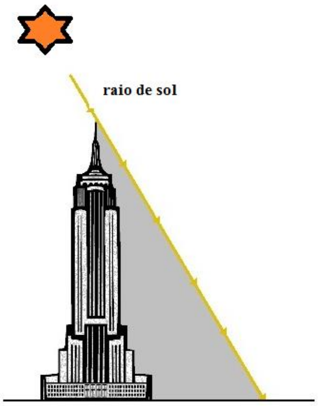
4.1 - Introdução

A **Trigonometria** (tri:três;gonos: lado e metria: medida) é o ramo da Matemática responsável peloestudo das relação existente entre os lados e os ângulos de um triângulo.

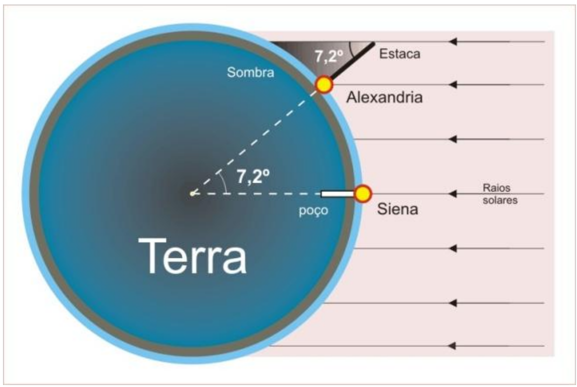
A trigonometria possui uma infinidade de aplicações práticas. Desde a antiguidade já se usava da trigonometria para obter distâncias impossíveis de serem calculadas por métodos comuns.

Algumas aplicações da trigonometria são:

- Determinação da altura de certo prédio.

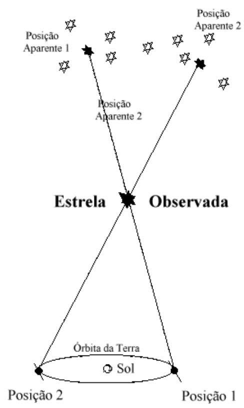


- Os gregos determinaram a medida do raio da terra, por um processo muito simples.



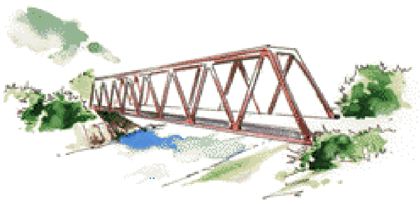
Fonte: http://slideplayer.com.br

- Para medir a distância da Terra às estrelas, a trigonometria torna o problema simples.



Fonte:cdcc.usp.br

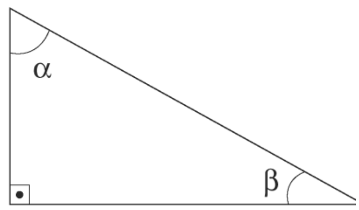
- Um engenheiro precisa saber a largura de um rio para construir uma ponte, o trabalho dele é mais fácil quando ele usa dos recursos trigonométricos.


Fonte: www.matematicalegal.blogspot.com

Note que em todos os desenhos acima aparecem triângulos.

4.2 – TriânguloRetângulo

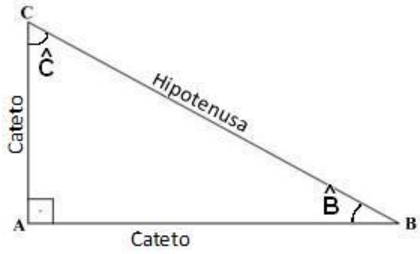
É um triângulo que possui um ângulo reto, isto é, um dos seus ângulos mede noventa graus, cujo símbolo é um quadrado com um ponto central. Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, então os outros dois ângulos somarão 90°.



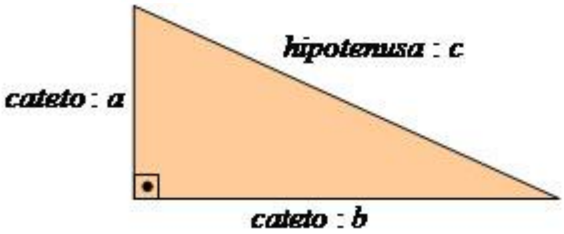
$$\boxed{\alpha + \beta = 90^\circ}$$

Observação: Se a soma de dois ângulos mede 90°, estes ângulos são denominados **complementares**, portanto podemos dizer que o triângulo retângulo possui dois ângulos complementares.

Os lados de um triângulo retângulo recebem nomes especiais. Estes nomes são dados de acordo com a posição em relação ao ângulo reto. O lado oposto ao ângulo reto é a hipotenusa. Os lados que formam o ângulo reto são os catetos.

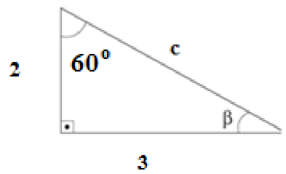


A medida dos lados de um triângulo retângulo obedece ao TEOREMA DE PITÁGORAS: **O quadrado da hipotenusa é igual a soma do quadrado dos catetos:**



$$c^2 = a^2 + b^2$$

Exemplo: Na figura temos um triângulo retângulo cujos catetos e um ângulo interno é conhecido. Determine o valor da hipotenusa e do ângulo desconhecido.



cálculo do ângulo:

$60^\circ + \beta = 90^\circ \rightarrow \beta = 90^\circ - 60^\circ \rightarrow \beta = 30^\circ$

Cálculo do lado

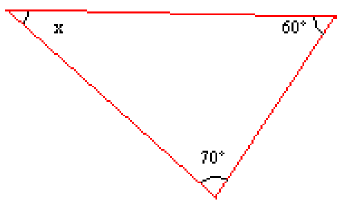
$c^2 = 2^2 + 3^2 \rightarrow c^2 = 4 + 9 = 13 \rightarrow c^2 = 13$

$c = \sqrt{13}$

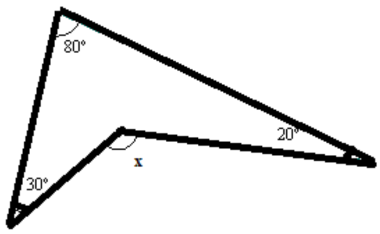
Exercícios

1) Calcule o valor de x nas figuras:

a)



b)



2)Copie e complete o quadro, sendo A,B e C ângulos internos de um triângulo.

Â	30°	20°		75°	90°	
B̂	70°		60°	40°		38°
Ĉ		110°	60°		43°	51°

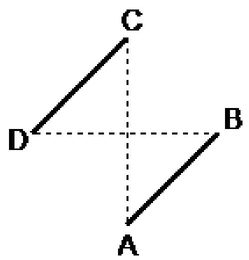
3)(PUC-RJ) Millôr Fernandes, em uma bela homenagem à Matemática, escreveu um poema do qual extraímos o fragmento abaixo:

Às folhas tantas de um livro de Matemática,
um Quociente apaixonou-se um dia doidamente
por uma Incógnita.
Olhou-a com seu olhar inumerável
e viu-a do ápice à base: uma figura ímpar;
olhos rombóides, boca trapezóide,
corpo retangular, seios esferóides.
Fez da sua uma vida paralela à dela,
até que se encontraram no Infinito.
“Quem és tu?” – indagou ele em ânsia radical.
“Sou a soma dos quadrados dos catetos.
Mas pode me chamar de hipotenusa.”
…………………………………………………………………..
(Millôr Fernandes. Trinta Anos de Mim Mesmo.)

A Incógnita se enganou ao dizer quem era. Para atender ao Teorema de Pitágoras, deveria dar a seguinte
resposta:

A) “Sou a soma dos catetos. Mas pode me chamar de hipotenusa.”
B) “Sou o quadrado da soma dos catetos. Mas pode me chamar de hipotenusa.”
C) “Sou o quadrado da soma dos catetos. Mas pode me chamar de quadrado da hipotenusa.”
D) “Sou a soma dos quadrados dos catetos. Mas pode me chamar de quadrado da hipotenusa.”

4)As diagonais do losango medem 8 cm e 6 cm.



Fonte: www.calculobasico.com.br

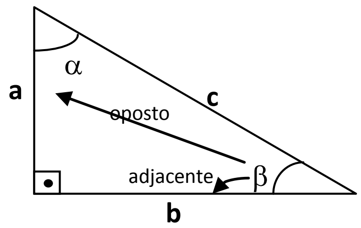
O polígono (parcialmente desenhado) tem o perímetro de (em cm):

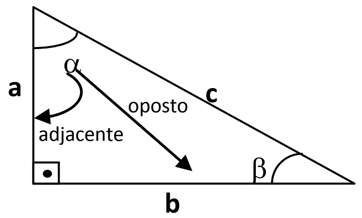
A) 20
B) 40
C) 24
D) $10\sqrt{2}$
E) $20\sqrt{2}$

4.3 –Nomenclatura dos catetos

Os catetos recebem nomes especiais de acordo com a sua posição em relação ao ângulo sob análise.

Ângulo	Lado oposto	Lado adjacente
α	**b** cateto oposto	**a** cateto adjacente
β	**a** cateto oposto	**b** cateto adjacente



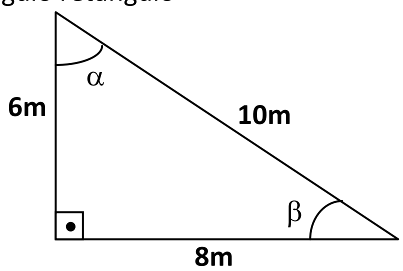


4.4 - Funções trigonométricas básicas

As Funções trigonométricas básicas são relações entre as medidas dos lados do triângulo retângulo e seus ângulos. As três funções básicas mais importantes da trigonometria são: seno, cosseno e tangente de um ângulo. O ângulo é indicado pela letra x.

Função	Notação	Definição
seno	sen(x)	$\dfrac{\text{Medida do cateto oposto a x}}{\text{Medida da hipotenusa}}$
cosseno	cos(x)	$\dfrac{\text{Medida do cateto adjacente a x}}{\text{Medida da hipotenusa}}$
tangente	tg(x)	$\dfrac{\text{Medida do cateto oposto a x}}{\text{Medida do cateto adjacente a x}}$

Exemplo: No desenho abaixo, calcule o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos α e β do triângulo retângulo



$$\propto \begin{cases} sen(\propto) = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5} \\ cos(\propto) = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5} \\ tg(\propto) = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

$$\beta \begin{cases} sen(\beta) = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5} \\ cos(\beta) = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5} \\ tg(\beta) = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

4.5 Relações trigonométricas básicas

1) Note no exemplo acima que, sendo α e β complementares ($\alpha+\beta=90^o$),

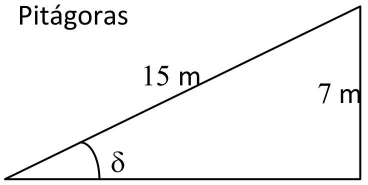
$$\begin{cases} sen(\propto) = \cos(\beta) \\ \cos(\alpha) = sen(\beta) \\ tg(\alpha) = \dfrac{1}{\mathrm{tg}(\beta)} \end{cases}$$

2) Para qualquer ângulo x valem as relações:

$$\boxed{sen^2(x) \quad + \cos^2(x) \quad = 1}$$

$$\boxed{tg(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)}}$$

Exemplo: Calcule o cosseno e a tangente do ângulo δ na figura sem utilizar o Teorema de Pitágoras



$$sen(\delta) = \frac{7}{15}$$

Cálculo do cosseno:

$$sen^2(\delta) \quad + \cos^2(\delta) \quad = 1$$

$$\left(\frac{7}{15}\right)^2 + cos^2(\delta) = 1$$

$$\frac{49}{225} + cos^2(\delta) = 1$$

$$cos^2(\delta) = 1 - \frac{49}{225}$$

$$cos^2(\delta) = \frac{176}{225}$$

$$cos(\delta) = \sqrt{\frac{176}{225}} = \frac{\sqrt{176}}{\sqrt{225}} = \frac{\sqrt{176}}{15}$$

Cálculo da tangente:

$$tg(\delta) = \frac{sen(\delta)}{\cos(\delta)}$$

$$tg(\delta) = \frac{7/_{15}}{\sqrt{176}/_{15}}$$

$$tg(\delta) = \frac{7}{\sqrt{176}}$$

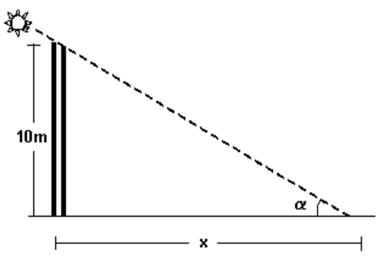
Racionalizando:

$$tg(\delta) = \frac{7}{\sqrt{176}} \cdot \frac{\sqrt{176}}{\sqrt{176}}$$

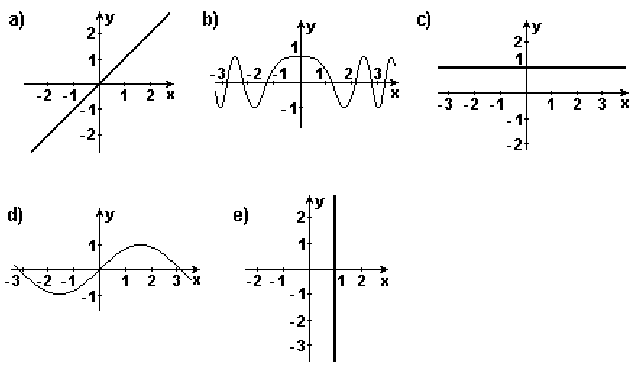
$$tg(\delta) = \frac{7\sqrt{176}}{176}$$

Exercícios

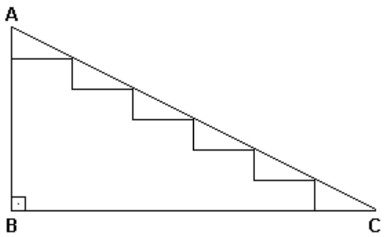
5)Milena, diante da configuração representada abaixo, pede ajuda aos vestibulandos para calcular o comprimento da sombra x do poste, mas, para isso, ela informa que osen(α) = 0,6. Calcule o comprimento da sombra x



6) (UFMG) Dentre os gráficos abaixo, o que pode representar a função y = $(\cos x)^2 + (\text{sen } x)^2$ é



7) A figura adiante representa o perfil de uma escada cujos degraus têm todos a mesma extensão, além de mesma altura. Se AB=2m e $B\hat{C}A$ mede 30°, então qual –ea medida da extensão de cada degrau ?



8) Determine os ângulos de um triângulo retângulo de catetos que medem $\sqrt{3}$ cm e 1 cm

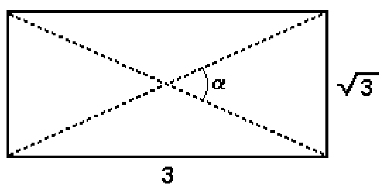
9) Ao aproximar-se de uma ilha, o capitão de um navio avistou uma montanha e decidiu medir a sua altura. Ele mediu um ângulo de 30° na direção do seu cume. Depois de navegar mais 2 km em direção à montanha, repetiu o procedimento, medindo um novo ângulo de 45°. Então, usando $\sqrt{3} = 1{,}73$, qual o valor dessa montanha em quilômetros?

10) No retângulo da figura, cos(α) vale:

a) $\sqrt{2}/2$ b) 1/2

c) $\sqrt{3}/2$ d) 1/3

e) 1/4

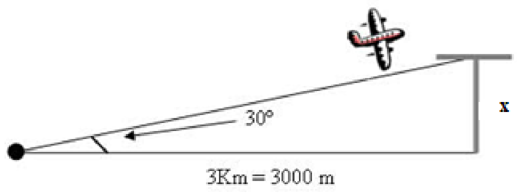


4.6 – Aplicações da Trigonometria Fundamental

A trigonometria possui inúmeras aplicações nos diversos ramos da ciência, sendo considerada uma importante aliada do mundo moderno.

1)Determinação de alturas.

Ao decolar, um avião sobe formando um ângulo de 30º com a pista (horizontal). Na direção do percurso existe uma torre de transmissão de energia elétrica situada a 3km do aeroporto e com altura igual a 150 metros. Verifique se, mantendo o trajeto, o avião pode colidir com a torre.



Usaremos a relação da tangente: $tg(30^o) = \frac{x}{3000}$

na última página do capítulo encontramos uma tabela com os ângulos e seus respectivos seno, cosseno e tangente

$$tg(30^o) = 0{,}577 \; logo \; 0{,}5774 = \frac{x}{3000}$$

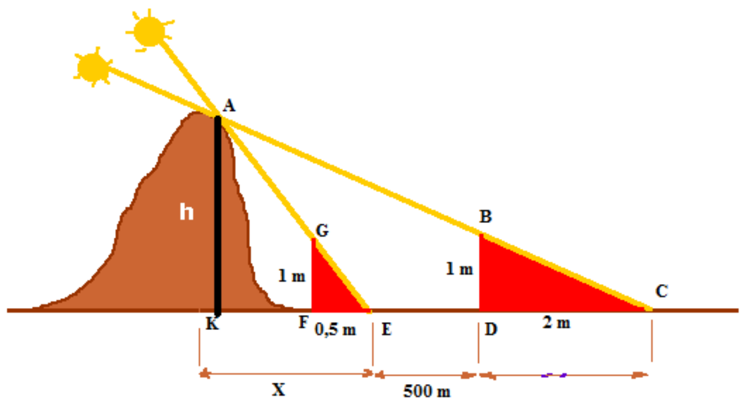
$$x = 0{,}5774 \cdot 3000$$

$$x = 1732{,}2m$$

O avião não irá colidir com a torre, pois essa possui 150 metros enquanto o avião estará a uma altura maior que 1700 metros.

2) Determinação da altura e distância de montanhas longínquas.

Pode-se calcular a altura h de uma montanha a uma distância X usando-se uma varinha posicionada em dois locais diferentes (nos pontos F e G da figura abaixo) e conhecendo o tamanho de suas respectivas sombras no terreno. Por simplificação usamos uma varinha de 1 m de comprimento.



Considere os ângulos $\theta_1 = G\hat{E}F$ e $\theta_2 = B\hat{C}D$

No triângulo GEF, temos $tg(\theta_1) = \frac{1}{0{,}5} = 2$. No triângulo AEK, temos $tg(\theta_1) = \frac{h}{x}$

Logo temos: $\frac{h}{x} = 2$ ou $h = 2 \cdot x$ ....(1)

No triângulo BCD, temos $tg(\theta_2) = \frac{1}{2}$. Notriângulo ACK, temos $tg(\theta_2) = \frac{h}{x+500+2} = \frac{h}{x+502}$

Logo $\frac{h}{x+502} = \frac{1}{2}$ ou $2 \cdot h = x + 502$ ....(2)

Deste modo, temos duas equações a duas incógnitas:

$$\begin{cases} h = 2 \cdot x \\ 2 \cdot h = x + 502 \end{cases}$$

Substituindo a primeira equação na segunda:

$$2 \cdot (2 \cdot x) = x + 502$$

$$4 \cdot x = x + 502$$

$$4 \cdot x - x = 502$$

$$3 \cdot x = 502$$

$$x = \frac{502}{3} = 176{,}3m$$

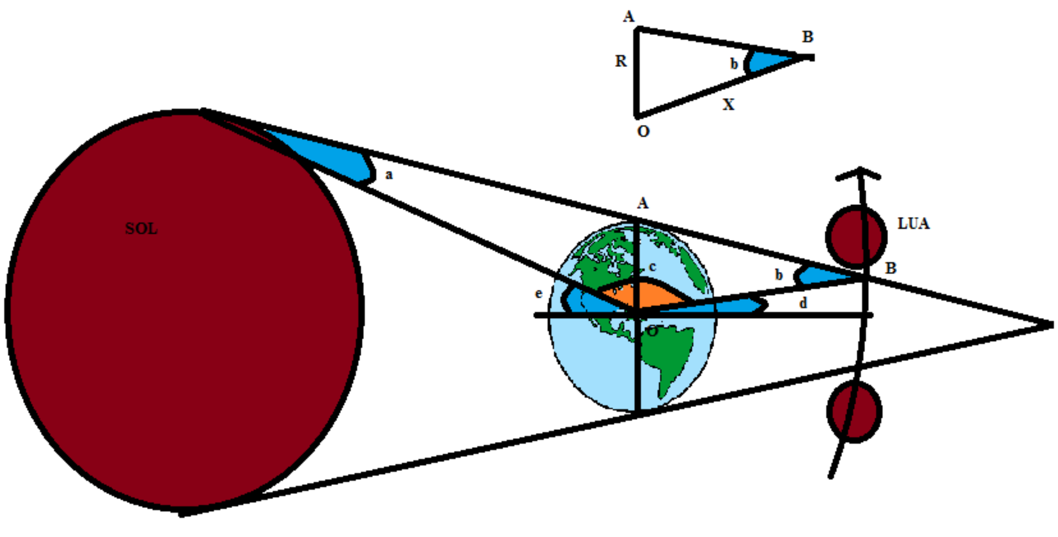
Substituindo o valor de na equação (1), resulta

$$h = 2 \cdot x = 2 \cdot 176{,}3 = 352{,}6m$$

3)Hiparco e a distância da Lua

Hiparco (190AC -120 AC)imaginou uma geometria com a qual, durante um eclipse lunar, isto é, quando a Terra fica exatamente entre o Sol e a Lua, seria possível calcular a distância da Terra à Lua. Sua construção geométrica baseia-sena medida de ângulos.

Hiparco imaginou dois triângulos retângulos, cujas hipotenusas ligariam o centro da Terra às bordas do disco solar e lunares, por ocasião de um eclipse da Lua.



No triângulo retângulo AOB, R representa o Raio da Terra e X a distância entre o centro da Terra e o centro da Lua. Se determinarmos o ângulo b poderíamos obterX através da função seno:

$$sen(b) = \frac{R}{X}$$

Isolando X, teremos:

$$X = \frac{R}{\operatorname{sen}(b)}$$

O problema seria encontrar o valor do ângulo b, uma vez que um matemático grego chamado Erastóteles já havia determinado que o valor do Raio da Terra era de 40000 km (o valor exato é de 40072 km). Logo R = 40000 km.

Na figura, note ainda que os ângulos internos *a,b* e *c* devem perfazer 180 e que os ângulos*c, e*e*d* somados devem dar 180 igualmente:

$$\begin{cases} a + b + c = 180 \\ c + d + e = 180 \end{cases}$$

Subtraindo as duas igualdades:

$$a + b + c - c - d - e = 180 - 180$$

$$a + b - d - e = 0$$

$$a + b = d + e$$

$$b = d + e - a$$

Portanto, para determinar b é preciso medir os ângulos *d, e* e*a*

d é a metade do ângulo de duração do eclipse lunar : *d= 0,653*^{o}

e é a metade do ângulo do disco solar visto da terra : *e=0,302*^{o}

*a*é desprezível, pois a distância entre o Sol e a Terra é tão grande que *a* é quase zero

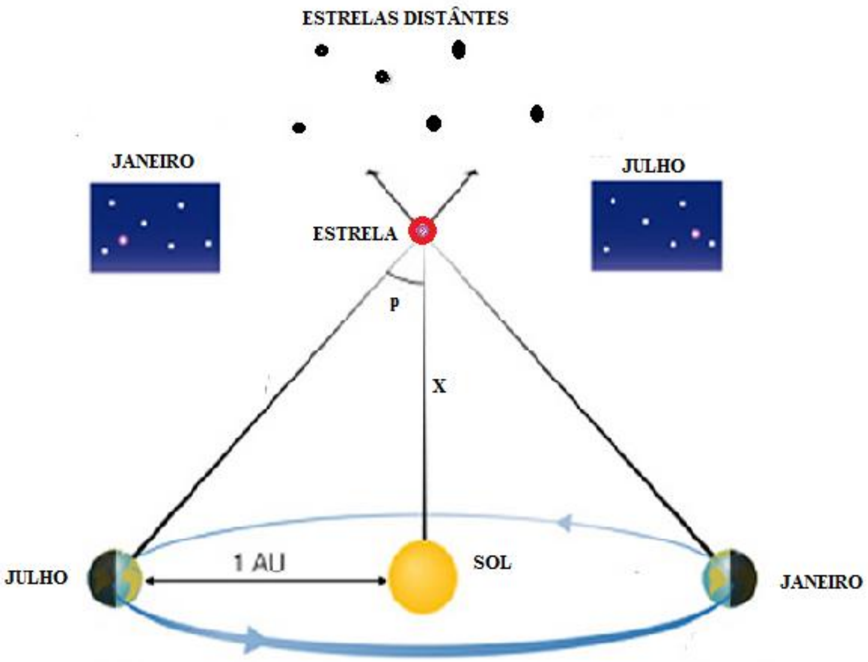
Logo *b = 0,653*^{o} *+ 0,302*^{o} *= 0,955*^{o}*.*

(O seno de 0,955^o *numa tabela de senos é um pouco menor que o seno de 1 na nossa tabela da última página)*

Portanto $X = \frac{40000}{sen\,(0{,}955)} = \frac{40000}{0{,}017} = 2.353.941\ km$

4) Distância das estrelas mais próximas.

Em astronomia, **paralaxe** é a diferença na posição aparente de um objeto visto por observadores em locais distintos. A paralaxe estelar é utilizada para medir a distância das estrelas utilizando o movimento da Terra em sua órbita.



Fonte:cse.ssl.berkeley.edu

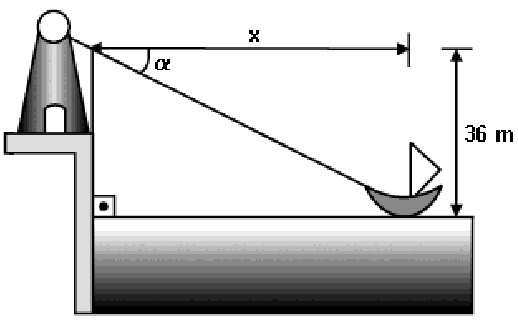
Na figura acima, um observador em julho enxerga a estrela no canto inferior direito do fundo das estrelas fixas enquanto em janeiro, a posição da estrela fica no canto inferior direito. A metade do arco de ângulo entre estas duas posições no céu é o ângulo de paralaxe (p). A distância média entre a Terra e o Sol define UNIDADE ASTRONÔMICA (UA). Esta distância é de 149 597 871 quilometros

Usando a tangente de p: $tg(p) = \frac{1}{x} \rightarrow$ $\boxed{x = \frac{1}{tg(p)}}$

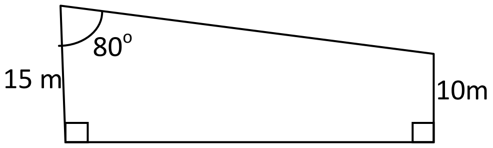
Na verdade, mesmo para as estrelas mais próximas, o ângulo p é tão pequeno que é impossível medi-lo a olho nu. Esta técnica só foi útil depois da invenção de telescópios mais poderosos no final do século XVIII, quando se verificou que a estrela mais próxima do Sol (Próxima-Centauro) situa-se a 253.154 UA

Exercícios

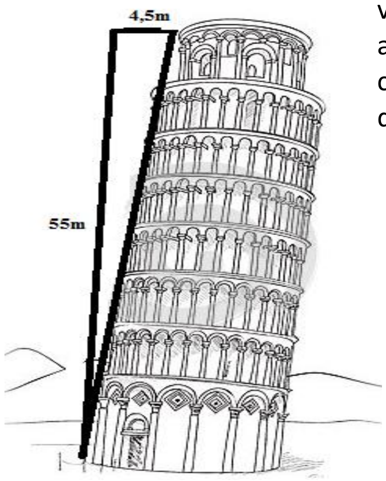
11) (UNESP) Um farol localizado a 36 m acima do nível do mar é avistado por um barco a uma distância x da base do farol, a partir de um ângulo α, conforme a figura. Admitindo-se que sen(α) = 3/5, calcule a distância x.



12) Determine a área aproximada do terreno representado a seguir:

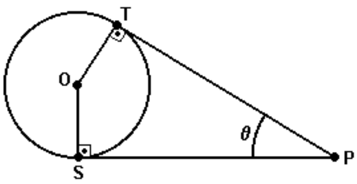


13)



A torre de Pisa é famosa por sua inclinação em relação à vertical. Desde sua construção, devido ao solo de argila e areia, a sua estrutura cedeu ao seu peso. Em 1370, foi constatado que seu ângulo de inclinação era de 1,6º.Com os dados da figura, qual é o seu ângulo de inclinação hoje ?

14) Um observador, em P, enxerga uma circunferência de centro O e raio 1 metro sob um ângulo θ, conforme mostra a figura. Calcule tg(θ), dado que a distância de P a O vale 3 metros.



15) No triângulo ABC temos AB = AC e sen x = 3/4. Então cos y é igual a

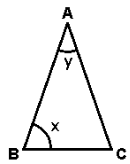
a) 9/16

b) 3/4

c) 7/9

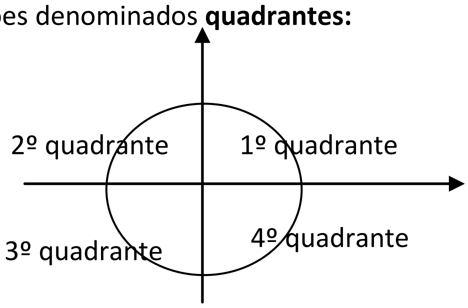
d) 1/8

e) 3/16

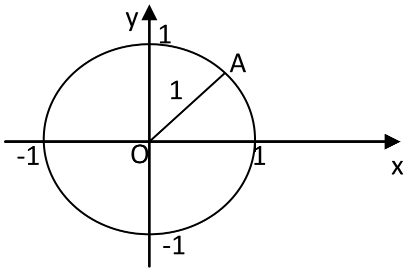


4.7 –Círculo Trigonométrico

Dividimos a região de um círculo com centro na intersecção de dois eixos (um vertical e outro horizontal em quatro regiões denominados **quadrantes:**

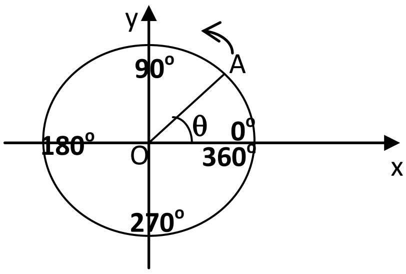


Para aprofundar o entendimento das relações e propriedades das relações trigonométricas básicas (seno, cosseno e tangente), precisamos definir um círculo de raio valendo 1 (uma unidade) centrado na origem de dois eixo de coordenadas x e y:



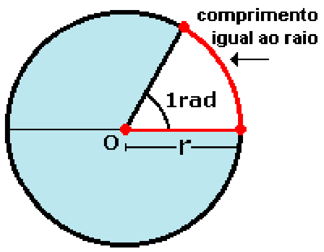
Note que a distância de O a qualquer ponto do círculo vale 1; logo $\overline{OA} = 1$.

O segmento $\overline{OA}$ faz com o eixo horizontal um ângulo que chamaremos da letra grega Theta (θ). Variando a posição do ponto A ao longo do círculo, variamos também o valor de θ. Em particular, a partir do eixo x, quando o ponto A passa pelos eixos e faz uma volta completa, os valores de θ ao passar pelos eixos varem, respectivamente 0^o, 90^o, 180^o,270^o e 360^o. Uma volta completa em torno do círculo perfaz um ângulo θ de 360^o, coincidindo com 0^o.



4.7.1 – Radianos

Radiano (1 rad) é o ângulo definido em um círculo por um arco de circunferência com o mesmo comprimento que o raio do referido círculo.É um modo mais natural de representar ângulos .

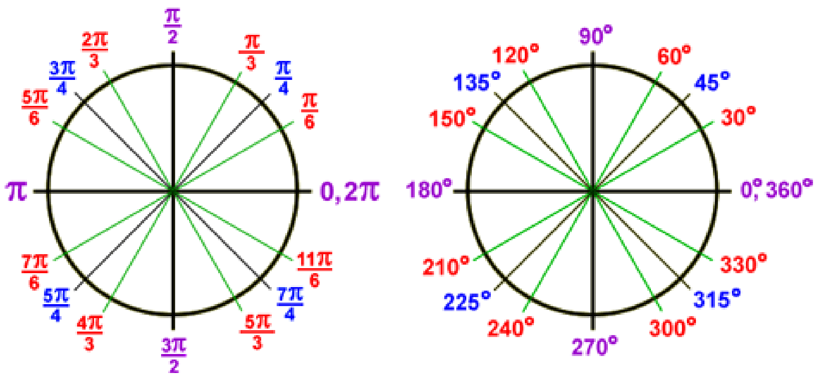


Fonte: http://pessoal.sercompel.com.br

Para converter o ângulo de Graus em Radianos, utilizamos a relação útil

$$\boxed{\begin{array}{c} 180^o \leftrightarrow \pi \, rad \\ \pi \approx 3{,}1416 \end{array}}$$

A figura abaixo faz a correlação entre as duas unidades para alguns ângulos principais:



Fonte: http://navax.net.br

Exemplo:

a)Determine o valor de 60^o em radianos.

Podemos usar uma relação como regra de três :

grau rad

180 ------------------------ π

60------------------------ x

$$180 \cdot x = 60 \cdot \pi$$

$$x = \frac{60 \cdot \pi}{180}$$

Dividindo numerador e denominador por 60:

$$x = \frac{(60 \cdot \pi) \div 60}{180 \div 60} \quad x = \frac{\pi}{3}$$

b) determine o valor do ângulo de $\frac{\pi}{5}$ rad em graus.

Podemos usar uma relação como regra de três:

grau rad

180 ------------------------ π

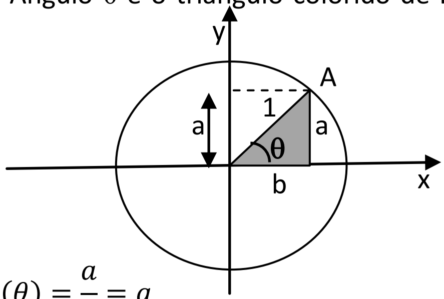
x------------------------ $\frac{\pi}{5}$

$$\pi \cdot x = 180 \cdot \frac{\pi}{5}$$

$$x = \frac{180 \cdot \pi}{5 \cdot \pi} = \frac{180}{5} \rightarrow x = 36^o$$

8.7.1-Seno e cosseno e tangente no círculo trigonométrico

Considereno círculo trigonométrico com o Ângulo θ e o triângulo colorido de hipotenusa 1 e catetos a e b

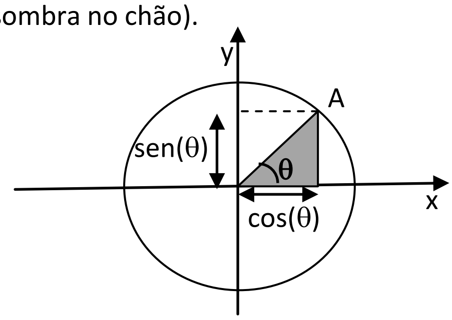


Neste triangulo temos:

$$sen(\theta) = \frac{a}{1} = a$$

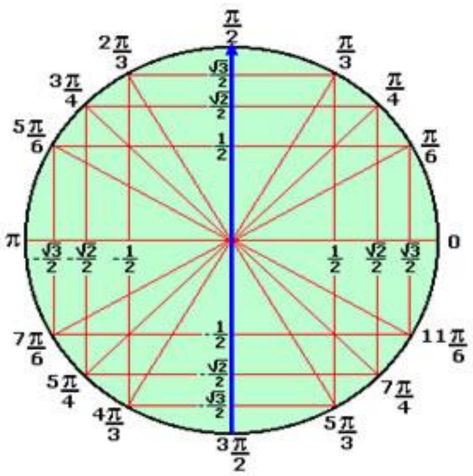
$$cos(\theta) = \frac{b}{1} = b$$

Logo o seno do ângulo é a altura da projeção de OA no eixo y (sombra na parede) e o cosseno é a projeção de AO no eixo x (sombra no chão).



Seno

Observe a circunferência trigonométrica e o eixo verticala seguir:



Fonte: http://navax.net.br

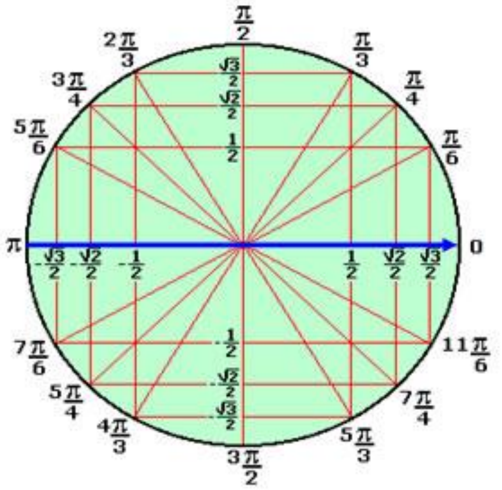
Obtemos assim uma tabela para os ângulos principais:

Ângulo	Seno	
0	0	
$\pi/6 = 30^o$	$\frac{1}{2}$	CRESCENTE

$\pi/4 = 45^{o}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$\pi/3 = 60^{o}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
$\pi/2 = 90^{o}$	1	
$2\pi/3 = 120^{o}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	DECRESCENTE
$3\pi/4 = 135^{o}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$5\pi/6 = 150^{o}$	$\frac{1}{2}$	
$\pi = 180^{o}$	0	
$7\pi/6 = 210^{o}$	$-\frac{1}{2}$	DECRESCENTE
$5\pi/4 = 225^{o}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$4\pi/3 = 240^{o}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	
$3\pi/2 = 270^{o}$	-1	
$5\pi/3 = 300^{o}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	CRESCENTE
$7\pi/4 = 315^{o}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$11\pi/6 = 330^{o}$	$-\frac{1}{2}$	
$2\pi = 360^{o}$	0	

Cosseno

Analisamos o eixo horizontal para determinar o cosseno dos ângulos do círculo trigonométrico.

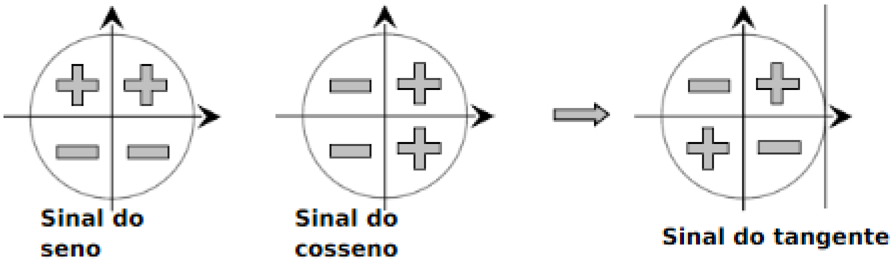


Fonte: http://navax.net.br

Ângulo	Cosseno	
0	1	
$\pi/6 = 30^o$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	CRESCENTE
$\pi/4 = 45^o$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$\pi/3 = 60^o$	$\frac{1}{2}$	
$\pi/2 = 90^o$	0	
$2\pi/3 = 120^o$	$-\frac{1}{2}$	DECRESCENTE
$3\pi/4 = 135^o$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$5\pi/6 = 150^o$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	
$\pi = 180^o$	-1	
$7\pi/6 = 210^o$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	DECRESCENTE
$5\pi/4 = 225^o$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$4\pi/3 = 240^o$	$-\frac{1}{2}$	
$3\pi/2 = 270^o$	0	
$5\pi/3 = 300^o$	$\frac{1}{2}$	CRESCENTE
$7\pi/4 = 315^o$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	

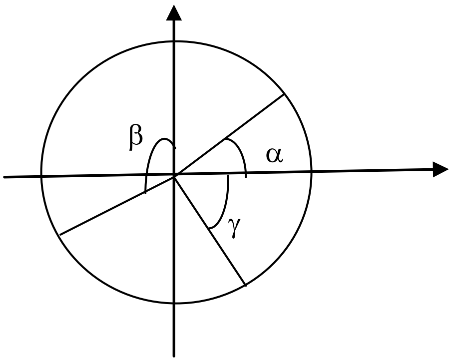
$11\pi/6 = 330^o$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
$2\pi = 360^o$	1	

Note que os sinais podem variar de acordo com o quadrante, para o seno, o cosseno e consequentemente a tangente:



Fonte: http://miguel-10o.wikispaces.com

Exemplo: Considere os ângulos α, β e γ conforme representado no círculo:



Pode-se afirmar que:

a)cos α< cos β

b)cos γ< cos α

c)senα<senβ

d)senβ< cos γ

e) cos β< cos γ

Solução: Observe que αeγ estão no 1º e 4º quadrante (positivos para cosseno), mas a projeção no eixo x do ângulo γ é menor que a do ângulo α . Letra (b)

Exercícios

16)Se a medida de um arco, em graus, é igual a 128, sua medida em radianos é igual a quanto?

17)A função f(x) = 16 (sen x) (cos x) assume valor máximo igual a:

a) 16

b) 12

c) 10

d) 8

e) 4

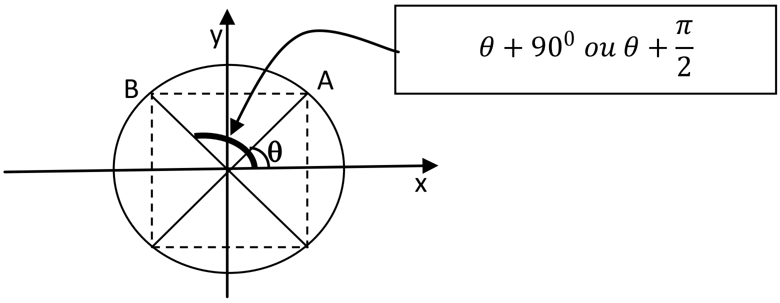
18)Considerando que $P = sen(37^o) \cdot cos(132^o) \cdot sen(300^o) \cdot \cos(237^o)$ é correto afirmar que P é positivo ou negativo?

4.8 – Simetrias no Círculo trigonométrico

Apenas com informação do ângulo do primeiro quadrante é possível saber o valor e o sinal de outros ângulos em outros quadrantes.

4.8.1-Ângulos situados no 2º quadrante

Note a simetria entre a abertura θ associada ao ponto A e a abertura associada ao ponto B:



Pelo quadrado pontilhado, nota-se que ambos têm a mesma altura em y e comprimento de mesmo valor porem opostos em x, logo:

$$sen\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = sen(\theta)$$
$$cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -cos(\theta)$$

Exemplo: Converta oângulo de 150^o em radianos e calcule o seu seno, cosseno e tangente.

Convertendo:

grau rad

180 ------------------------ π

150------------------------ x

$$180 \cdot x = 150 \cdot \pi$$

$$x = \frac{150 \cdot \pi}{180} = \frac{150 \cdot \pi \div 30}{180 \div 30} = \frac{5 \cdot \pi}{6}$$

Como 150º está no segundo quadrante, tentemos relacioná-lo com um ângulo θ no primeiro quadrante:

$$\theta + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\theta = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} - \frac{3\pi}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

Portanto:

$$\frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$$

Calculo do seno, cosseno e tangente:

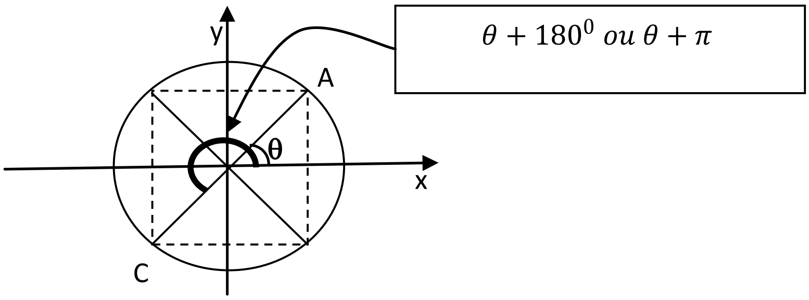
$$sen(150^o) = sen\left(\frac{5\pi}{6}\right) = sen\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos(150^o) = cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = -cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$tg(150^o) = \frac{sen(150^o)}{\cos(150^o)} = \frac{\sqrt{3}/_2}{-\,^1/_2} = -\frac{\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$$

4.8.2-Ângulos situados no 3º quadrante

No 3º quadrante, a abertura do ponto C tem projeções de mesmo tamanho da abertura em A, porem opostas tanto no eixo x como no eixo y.



Logo:

$$sen(\theta + \pi) = -sen(\theta)$$
$$cos(\theta + \pi) = -cos(\theta)$$

Exemplo: Determine o seno, cosseno e tangente do ângulo de 200°.

Podemos evitar a conversão para radianos e trabalhar com graus. Tentemos relacionar 200° com um ângulo θ no primeiro quadrante

$$\theta + 180^0 = 200^0$$

$$\theta = 200^0 - 180^0 = 20^0$$

Portanto

$$200^0 = 20^0 + 180^0 = 20^0 + \pi$$

$$sen(200^o) = sen(20^0 + \pi) = -sen(20^0) = -0,342$$

$$cos(200^o) = cos(20^0 + \pi) = -cos(20^0) = -0,9397$$

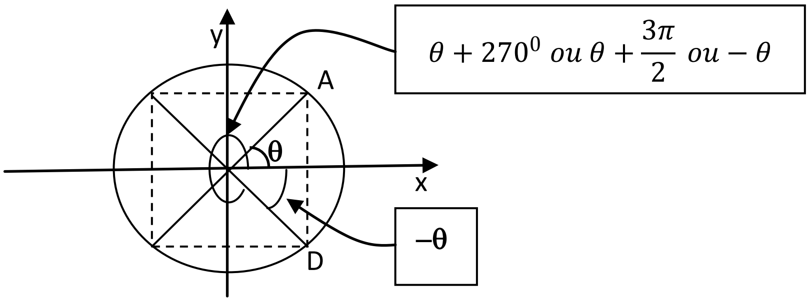
$$tg(200^o) = \frac{sen(200^o)}{\cos(200^o)} = \frac{-0,342}{-0,9397} = 0,3639$$

4.8.3-Ângulos situados no 4º quadrante

No quarto quadrante, podemos sair de A e chegar a D de duas maneiras iguais, aumentando mais 270 graus ou girá-lo na direção oposta com o mesmo valor do ângulo. Por isso,

$$\theta + 270^0 = -\theta$$

Veja que OD e AO têm mesma projeção no eixo x, mas projeções de mesmo valor e opostas no eixo y.



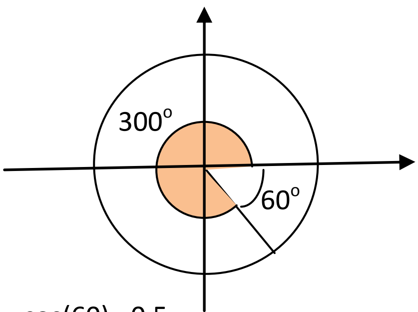
Portanto:

$$sen(-\theta) = -sen(\theta)$$
$$cos(-\theta) = cos(\theta)$$

Seria apenas necessário conhecer o valor das funções trigonométricas apenas no 1ºquadrante. Os demais se obtém pelas simetrias descritas acima.

Exemplo: Calcule o valor do número $N = {}^{100}/_{\cos(300^0)}$

No circulo trigonométrico, vemos que numa abertura de 300^o faltam 60^o para completar uma volta inteira:



Logo: cos(300^o) = cos(-60^o) = cos(60) =0,5

Portanto : $N = {}^{100}/_{\cos(300^0)} = \frac{100}{0,5} = 200$

Exercícios

19)Determine o valor de:

a) cos (98^o)

b) sen(176^o)

c)sen(234^o)

d)cos (305^o)

e)cos (196^o)

f)sen(355^o)

20)Qual o valor de y = cos 150° + sen 300° - tg 225° - cos 90° ?

21)Considere as afirmativas abaixo.

I. tan 92° = - tan 88°

II. tan 178° = tan 88°

III. tan 268° = tan 88°

IV. tan 272° = - tan 88°

Quais estão corretas?

a) Apenas I e III.

b) Apenas III e IV.

c) Apenas I, II e IV.

d) Apenas I, III e IV.

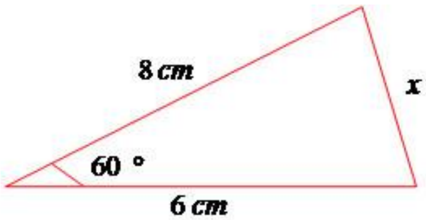
e) Apenas II, III e IV

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES DE TRIGONOMETRIA

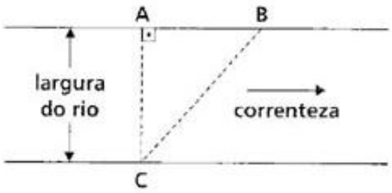
01)(UFPI) Um avião decola, percorrendo uma trajetória retilínea, formando com o solo, um ângulo de 30º (suponha que a região sobrevoada pelo avião seja plana). Depois de percorrer 1000 metros, qual a altura atingida pelo avião?

02)(CEFET–PR) A rua Tenório Quadros e a avenida Teófilo Silva, ambas retilíneas, cruzam-se conforme um ângulo de 30º. O posto de gasolina Estrela do Sul encontra-se na Avenida Teófilo Silva a 4 000 m do citado cruzamento. Portanto, determine em quilômetros, a distância entre o posto de gasolina Estrela do Sul e a Rua Tenório Quadros? (Use $\sqrt{3}$= 1,7)

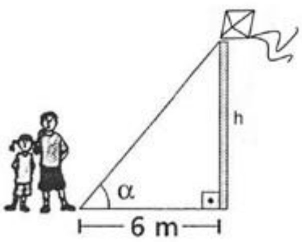
03)Determine o valor do lado oposto ao ângulo de 60º. Observe figura a seguir:



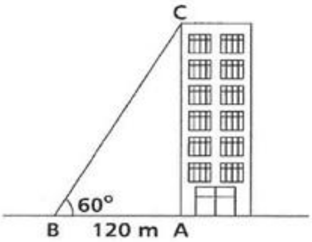
04) Um pescador quer atravessar um rio, usando um barco e partindo do ponto C. A correnteza faz com que ele atraque no ponto B da outra margem, 240m abaixo do ponto A. Se ele percorreu 300m, qual a largura do rio?



05) Ao empinar uma pipa, João percebeu que estava a uma distância de 6 metros do poste onde a pipa engalhou. Renata notou que o ângulo α formado entre a linha da pipa e a rua era 60°, como mostra a figura. Calcule a altura do poste.

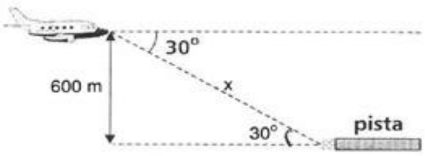


06) Uma pessoa encontra-se num ponto A, localizado na base de um prédio, conforme mostra a figura abaixo:

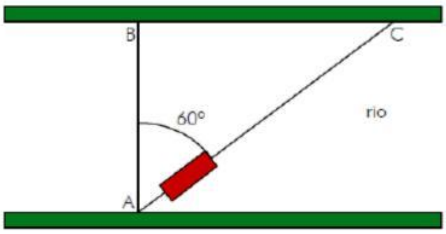


Se ela caminhar 120 metros em linha reta, chegará a um ponto B, de onde poderá ver o topo C do prédio, sob um ângulo de 60°. Quantos metros ela deverá se afastar do ponto A, andando em linha reta no sentido de A para B, para que possa enxergar o topo do prédio sob um ângulo de 30°?

07)Um avião está a 600m de altura quando se vê a cabeceira da pista sob um ângulo de declive de 30°. A que distância o avião está da cabeceira da pista?



08)A figura representa um barco atravessando um rio, partindo de A em direção ao ponto B. A forte correnteza arrasta o barco em direção ao ponto C, segundo um ângulo de 60º. Sendo a largura do rio de 120 m, a distância percorrida pelo barco até o ponto C, é:

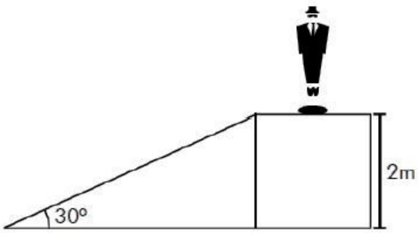


a) 140m b) 240m

c) 80m d) 100m

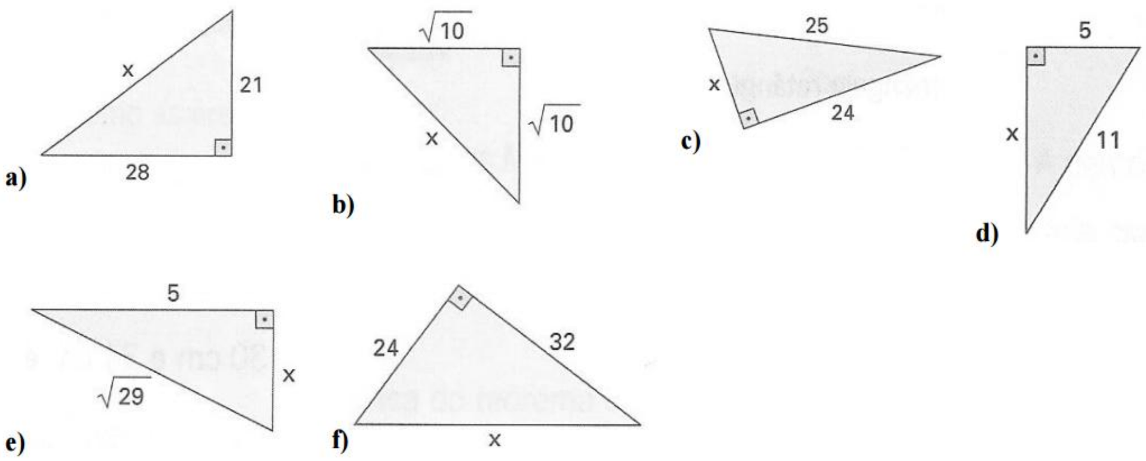
e) 40m

09) Para permitir o aceso a um monumento que está em um pedestal de 2m de altura, vai ser construída uma rampa com inclinação de 30° com o solo, conforme a ilustração. O comprimento da rampa será igual a:



10)(Unisinos – RS)Um avião levanta vôo sob um ângulo constante de 20º. Após percorrer 2 000 metros em linha reta, qual será a altura atingida pelo avião, aproximadamente? (Utilize: sem 20º = 0,342; cos 20º = 0,94 e tg 20º = 0,364).

11) Aplicando o Teorema de Pitágoras, determine o valor de “x “ nos triângulos retângulos:



Gabarito

1) a) x = 50° b)x = 130°

2)

		60			91
	50			47	
80			65		

3)d 4)a 5) 13,33m 6)c 7)√3/3m 8)30° e 60° 9)2,7

10)b 11)48m 12)354,49 m^2 13) aprox. 5° 14)4√2/7 15)d 16)32π/45

17)d 18)negativo 19)a)-0,9903 b)0,9925 c)-0,809 d)0,5 e)-0,9613 f)-0,872 20)$-\sqrt{3}-1$ 21)d

GABARITO EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) 500 metros 2) $x \cong 2{,}3Km$

3) $x = 2\sqrt{3}$ 4) $x = 180m$

5) $h = 6\sqrt{3}m$ 6) $h = 120\sqrt{3}$ e $x = 360m$

07)$x = 1200m$ 08) B

09)4m 10) 684m

11) a) 35 b) $2\sqrt{5}$ c) 7 d) $4\sqrt{6}$ e) 2 f)40

Referências bibliográficas:

DANTE. Matemática. Contexto e Aplicações. Volume único. Editora Ática. 2004.
GIOVANNI, José Ruy. BONJORNO, José Roberto. Matemática-uma nova abordagem. Editora FTD, 2000. Vol. 1,2,3.
SMOLE, Kátia Stocco. Matemática. Ensino Médio. Vol. I, II, III. Ed. Saraiva, 2003.
SOUZA, Joamir, Matemática-Novo Olhar. Ensino Médio. Vol. 1, 2, 3. Ed. FTD. 2010.
https://www.educacao.mg.gov.br/politica-de-privacidade/page/15089-supletivo
http://slideplayer.com.br
cdcc.usp.br
www.matematicalegal.blogspot.com
www.calculobasico.com.br
www.cse.ssl.berkeley.edu
http//pessoal.sercompel.com.br
http://navax.net.br
http://miguel-10o.wikispaces.com

Tabela de seno cosseno e tangente no primeiro quadrante:

Ângulo Â	sen Â	cos Â	tan Â	Ângulo Â	sen Â	cos Â	tan Â
1°	0,017452	0,999848	0,017455	46°	0,71934	0,694658	1,03553
2°	0,034899	0,999391	0,034921	47°	0,731354	0,681998	1,072369
3°	0,052336	0,99863	0,052408	48°	0,743145	0,669131	1,110613
4°	0,069756	0,997564	0,069927	49°	0,75471	0,656059	1,150368
5°	0,087156	0,996195	0,087489	50°	0,766044	0,642788	1,191754
6°	0,104528	0,994522	0,105104	51°	0,777146	0,62932	1,234897
7°	0,121869	0,992546	0,122785	52°	0,788011	0,615661	1,279942
8°	0,139173	0,990268	0,140541	53°	0,798636	0,601815	1,327045
9°	0,156434	0,987688	0,158384	54°	0,809017	0,587785	1,376382
10°	0,173648	0,984808	0,176327	55°	0,819152	0,573576	1,428148
11°	0,190809	0,981627	0,19438	56°	0,829038	0,559193	1,482561
12°	0,207912	0,978148	0,212557	57°	0,838671	0,544639	1,539865
13°	0,224951	0,97437	0,230868	58°	0,848048	0,529919	1,600335
14°	0,241922	0,970296	0,249328	59°	0,857167	0,515038	1,664279
15°	0,258819	0,965926	0,267949	60°	0,866025	0,5	1,732051
16°	0,275637	0,961262	0,286745	61°	0,87462	0,48481	1,804048
17°	0,292372	0,956305	0,305731	62°	0,882948	0,469472	1,880726
18°	0,309017	0,951057	0,32492	63°	0,891007	0,45399	1,962611
19°	0,325568	0,945519	0,344328	64°	0,898794	0,438371	2,050304
20°	0,34202	0,939693	0,36397	65°	0,906308	0,422618	2,144507
21°	0,358368	0,93358	0,383864	66°	0,913545	0,406737	2,246037
22°	0,374607	0,927184	0,404026	67°	0,920505	0,390731	2,355852
23°	0,390731	0,920505	0,424475	68°	0,927184	0,374607	2,475087
24°	0,406737	0,913545	0,445229	69°	0,93358	0,358368	2,605089
25°	0,422618	0,906308	0,466308	70°	0,939693	0,34202	2,747477
26°	0,438371	0,898794	0,487733	71°	0,945519	0,325568	2,904211
27°	0,45399	0,891007	0,509525	72°	0,951057	0,309017	3,077684
28°	0,469472	0,882948	0,531709	73°	0,956305	0,292372	3,270853
29°	0,48481	0,87462	0,554309	74°	0,961262	0,275637	3,487414
30°	0,5	0,866025	0,57735	75°	0,965926	0,258819	3,732051
31°	0,515038	0,857167	0,600861	76°	0,970296	0,241922	4,010781
32°	0,529919	0,848048	0,624869	77°	0,97437	0,224951	4,331476
33°	0,544639	0,838671	0,649408	78°	0,978148	0,207912	4,70463
34°	0,559193	0,829038	0,674509	79°	0,981627	0,190809	5,144554
35°	0,573576	0,819152	0,700208	80°	0,984808	0,173648	5,671282
36°	0,587785	0,809017	0,726543	81°	0,987688	0,156434	6,313752
37°	0,601815	0,798636	0,753554	82°	0,990268	0,139173	7,11537
38°	0,615661	0,788011	0,781286	83°	0,992546	0,121869	8,144346
39°	0,62932	0,777146	0,809784	84°	0,994522	0,104528	9,514364
40°	0,642788	0,766044	0,8391	85°	0,996195	0,087156	11,43005
41°	0,656059	0,75471	0,869287	86°	0,997564	0,069756	14,30067
42°	0,669131	0,743145	0,900404	87°	0,99863	0,052336	19,08114
43°	0,681998	0,731354	0,932515	88°	0,999391	0,034899	28,63625
44°	0,694658	0,71934	0,965689	89°	0,999848	0,017452	57,28996
45°	0,707107	0,707107	1	90°	1	0	-