UNIDADE 6

ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

6.1 - Introdução

É o ramo da matemática que estuda os diferentes critérios de contagem que um determinado conjunto finito de objetos podem ser agrupados.

Por exemplo: Tomemos uma palavra pequena como CÉU. De quantas maneiras diferentes podemos embaralhar estas três letras?

Podemos tentar resolver de modo bruto, escrevendo todas as possibilidades.

CÉU
CUÉ
ÉCU
ÉUC
UCÉ
UÉC

} 6 maneiras diferentes

Este modo de resolução nem sempre é o recomendado, embora aqui seja fácil.

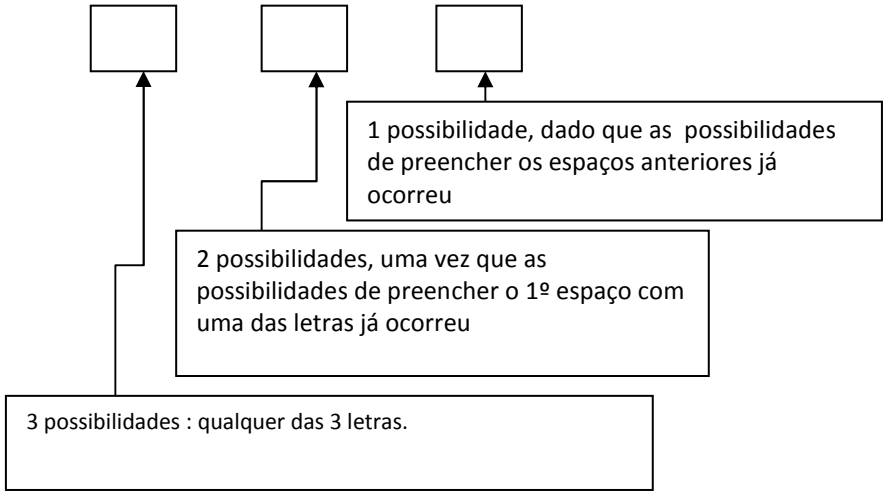
Podemos ainda resolver usando um artifício denominado **Princípio Fundamental de Contagem:**

Imagine que tenhamos três espaços vazios para preencher com as letras:

No 1º espaço podemos colocar uma das três letras livremente

No 2º espaço, uma vez que já escolhemos uma letra para o primeiro, sobram as outras duas letras para escolhermos.

No 3º espaço, já que duas letras foram escolhidas, sobra apenas uma letra.



Total de possibilidades: 3 possibilidades X 2 possibilidades X 1 possibilidade = 3.2.1=6

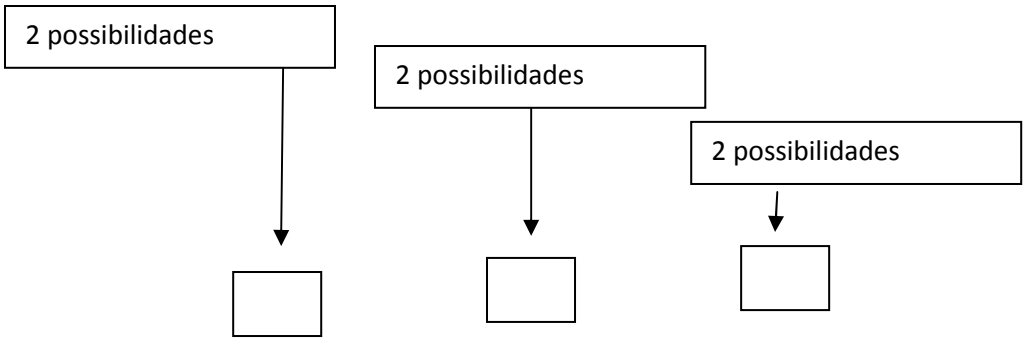
Exemplo: uma moeda é lançada três vezes sucessivamente. Quais são as sequências possíveis de cara e coroa?

Usando o princípio fundamental de contagem para cada resultado de lançamento escolhemos um espaço vazio:

No 1º lançamento há duas possibilidades: Cara ou Coroa

No 2º lançamento também há duas possibilidades: Cara ou Coroa

No 3º lançamento também há duas possibilidades: Cara ou Coroa



Total de possibilidades: 2.2.2 = 8 possíveis resultados.

Poderíamos fazer de modo bruto, escrevendo os possíveis resultados para caras (A) e coroas (B) para este caso: [(A,A,A), (A,A,B) , (A,B,A) , (A,B,B) (B,A,A),(B,B,A), (B,A,B), (B,B,B)], mas e se , ao invés de 3 lançamentos, fossem 11 lançamentos? É mais simples resolver pelo princípio fundamental de contagem:

2.2.2.2.2.2.2.2.2.2.2 = 20498 possibilidades

6.2 - PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DE CONTAGEM:

Suponha um conjunto de k elementos (a_1, a_2, a_3, ..., a_k) de modo que:

a_1 possa ser escolhido de n_1 maneiras

a_2 possa ser escolhido de n_2 maneiras

-
-
-

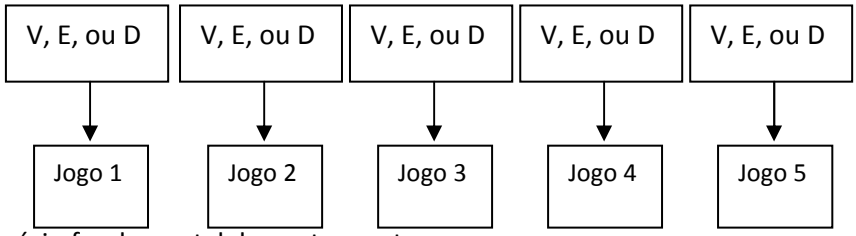
a_k possa ser escolhido de n_k maneiras

Então o numero de possibilidades para construir as sequências com os elementos de (a_1, a_2, a_3,..., a_k)é

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k$$

Exemplo: A seleção brasileira de futebol irá realizar um torneio com outras 5 seleções no sistema “todos jogam contra todos uma única vez”. Quais são as possíveis sequências de resultados – vitória (V), Empate (E) e derrota (D) – da equipe brasileira nesse torneio?

Resolução: A seleção ira jogar contra as outras em 5 jogadas. Cada jogada pode resultar em V, E ou D (3 possibilidades):



Pelo Princípio fundamental de contagem temos

3.3.3.3.3 = 246 possíveis resultados**.**

Exercícios:

1) Uma caixa automática de banco só trabalha com notas de 5 e 10 reais. Um usuário deseja fazer um saque de R$100,00. De quantas maneiras diferentes a caixa eletrônica poderá fazer esse pagamento? Fonte: https://pir2.forumeiros.com/t73178-analise-combinatoria

2) Sabendo que números de telefone não começam com 0 nem com 1, calcule quantos diferentes números de telefone podem ser formados com 7 algarismos Fonte: https://brainly.com.br

3) Considere todas as trinta e duas sequências, com cinco elementos cada uma, que podem ser formadas com os algarismos 0 e 1. Quantas dessas sequências possuem pelo menos três zeros em posições consecutivas? Fonte: https://pir2.forumeiros.com/t73178-analise-combinatoria

4) Uma fechadura de segredo possui 4 contadores que podem assumir valores de 0 a 9 cada um, de tal sorte que, ao girar os contadores, esses números podem ser combinados, para formar o segredo e abrir a fechadura. De quantos modos esses números podem ser combinados para se tentar encontrar o segredo? Fonte: https://brainly.com.br

5) (Ita 2001) Para responder a certo questionário, preenche-se o cartão apresentado a seguir, colocando-se um "x" em uma só resposta para cada questão. De quantas

maneiras distintas pode-se responder a esse questionário?

CARTÃO RESPOSTA					
QUESTÕES	1	2	3	4	5
SIM	☐	☐	☐	☐	☐
NÃO	☐	☐	☐	☐	☐

6.3 - FATORIAL DE UM NÚMERO INTEIRO:

Em problemas envolvendo o princípio natural de contagem é possível encontramos multiplicações do tipo 6.5.4.3.2.1 ou 34.33.32 ou 12.11.10.9.8.7.6.5.4

Uma forma sintética de escrevermos multiplicações deste tipo envolve o símbolo (!), denominado FATORIAL. O fatorial de um número é a multiplicação deste número por todos os números inteiros naturais menores que ele.

4! = 4.3.2.1 = 24

7! = 7.6.5.4.3.2.1 = 5040

Obs.

1! = 1

0! = 1

Note que há várias maneiras de escrever 7! :

7! = 7.6! = 7.6.5! = 7.6.5.4! = 7.6.5.4.3! etc.

Exemplos:

1) Calcule: $\frac{16!}{12!}$

$$\frac{16!}{12!} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12!}{12!} = 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 = 43680$$

2) Escreva o produto 32.31.30 como uma fração de fatoriais.

$$32 \cdot 31 \cdot 30 = \frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{29 \cdot 28 \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{32!}{29!}$$

Exercícios:

6) Calcule o valor de

a) $\frac{6!}{4!}$

b) $5! - 3!$

c) $(6-2)!$

d) $\frac{(12-3)!}{3!\cdot 4!}$

7) Escreva os produtos abaixo como uma fração de fatoriais:

a) 12.11.10.9 b) 33.65.64

8) calcule o valor de n de modo a satisfazer (n + 1)!/n! = 9.

9) Qual e o valor de n solução da equação $(n!)^2/[(n + 1)!\ (n - 1)!] = 4/5$?

6.4: Agrupamentos Simples:

Há três tipos principais de agrupamentos, sendo que eles podem ser simples, com repetição ou circulares. Apresentaremos alguns detalhes de tais agrupamentos.

6.4.1: Permutações:

Dado um conjunto de n elementos distintos, a permutação destes n elementos (P_n) é o número de todos os agrupamentos ordenados possíveis desses elementos.

$$P_n = n!$$

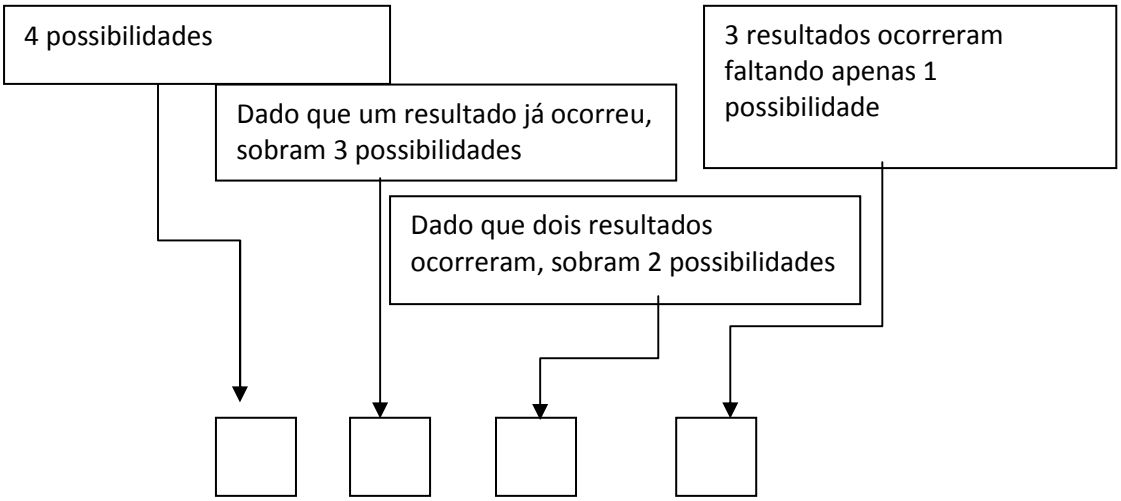
Exemplos:

1) Um dado foi lançado sucessivamente e as faces obtidas foram 2,3,5 e 6, não necessariamente nessa ordem. De quantas formas possíveis pode ter ocorrido esta sequência de resultados.

O conjunto de resultados possui 4 elementos, logo

$P_4 = 4! = 4.3.2.1 = 24$

Poderíamos ter usado o princípio fundamental de contagem: Imaginando 4 espaços vazios para cada lance do dado:



2) Quantos são os anagramas possíveis de serem obtidos com a palavra TESOURA?

Permutação das 7 letras da palavra : $P_7 = 7! = 7.6.5.4.3.2.1 = 5040$ anagramas

6.4.2 – Permutação com Repetição:

A palavra AGUA possui dois A's. Para distingui-los, deixemos o primeiro A maiúsculos e as letras restantes minúsculas. Quais seriam os anagramas então?:

Agua, Agau, Auga, Auag, Aagu, Aaug,

gAua, gAau,gauA, gaAu, guaA, guAa

uAga, uAag, ugAa, ugaA, uagA, uaAg

aAgu, aAug, agAu, aguA, augA, auAg

Perfazendo 24 anagramas (P_4). Transformando todas as letras em maiúsculas, teríamos:

AGUA, AGAU, AUGA, AUAG, AAGU, AAUG,

GAUA, GAAU,GAUA, GAAU, GUAA, GUAA

UAGA, UAAG, UGAA, UGAA, UAGA, UAAG

AAGU, AAUG, AGAU, AGUA, AUGA, AUAG

Note que cada anagrama acima aparece duas vezes repetido de modo que o total de anagramas diferente é 12

$$12 = \frac{24}{2} = \frac{4! \leftarrow 4\ é\ o\ número\ de\ letras\ da\ palavra\ AGUA}{2! \quad \leftarrow 2é\ o\ número\ de\ vezes\ que\ A\ se\ repete}$$

Fórmula:

$$P_n^{(r_1, r_2, \cdots, r_k)} = \frac{n!}{r_1! \cdot r_2! . \cdots \cdot r_k!}$$

Onde:

- n é o número de elementos do conjunto (a_1 ,a_2, a_3, a_k, ... ,a_n)
- r_1é o número de vezes que o elemento a_1 se repete
- r_2é o número de vezes que o elemento a_2 se repete
- r_ké o número de vezes que o elemento a_k se repete

Exemplos:

1) Quantos são os anagramas possíveis da palavra BANANADA?

Total de letras:8 letras

A repete 4 vezes

N repete 2 vezes

$$P_8^{(4,2)} = \frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{8.7.6.5.4!}{4! \cdot 2!} = \frac{8.7.6.5}{2!} = \frac{1680}{2} = 840$$

2) Considere os anagramas da palavra PIRATARIA
   a) Quantos são?

Número de letras:9

I repete 2 vezes

R repete 2 vezes $$P_9^{(2,2,3)} = \frac{9!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = \frac{9.8.7.6.5.4}{2.2} = \frac{60480}{4} = 15120$$

A repete 3 vezes

b) Começando com A: Fixa-se um A no início e permutam-se os demais. Lembrando que agora só há duas letras A´s a serem permutadas: A _ _ _ _ _ _ _.

$$P_8^{(2,2,2)} = \frac{8!}{2!.2!.2!} = \frac{8.7.6.5.4.3!}{2!.2!.2!} = 7.6.5.4.3! = 5040$$

c) Só há dois tipos de vogais. Começando com A, foi calculado. Começando com I é o mesmo procedimento: I _ _ _ _ _ _ _.

$$P_8^{(2,3)} = \frac{8!}{2!.3!} = \frac{8.7.6.5.4.3!}{2!.3!} = 8.7.6.5.2 = 3360$$

Somando os casos em que começam por A e começam por I, temos: $5040 + 3360 = 8400$.

Exercícios:

10) (Mackenzie 99) Num programa transmitido diariamente, uma emissora de rádio toca sempre as mesmas 10 músicas, mas nunca na mesma ordem. Para esgotar todas as possíveis sequências dessas músicas serão necessários aproximadamente:
    a) 100 dias.
    b) 10 anos.
    c) 1 século.
    d) 10 séculos.
    e) 100 séculos.
11) (Mackenzie 96) Os anagramas distintos da palavra MACKENZIE que têm a forma E.....E são em número de:
12) (Unirio 2000) Com as letras da palavra PROVA podem ser escritos x anagramas que começam por vogal e y anagramas que começam e terminam por consoante. Calcule x e y.

13) (Puc-rio 2002) Um trem de passageiros é constituído de uma locomotiva e 6 vagões distintos, sendo um deles restaurante. Sabendo-se que a locomotiva deve ir à frente, e que o vagão restaurante não pode ser colocado imediatamente após a locomotiva, qual é o número de modos diferentes de montar a composição?
14) Um processo industrial deve passar pelas etapas A, B, C, D e E.
    a) Quantas sequências de etapas podem ser delineadas se A e B devem ficar juntas no início do processo e A deve anteceder B?
    b) Quantas sequências de etapas podem ser delineadas se A e B devem ficar juntas, em qualquer ordem, e não necessariamente no início do processo?
15) O número de anagramas da palavra BIOCIÊNCIAS que terminam com as letras AS, nesta ordem é:
16) De quantas maneiras distintas podem-se alinhar cinco estacas azuis idênticas, uma vermelha e uma branca?

6.4.3 – Arranjo:

Arranjos simples ocorrem quando levamos em consideração a ordem de seus elementos, ou seja, quando os agrupamentos forem diferentes entre si pela ordem de seus elementos.

Por Exemplo: Ana, Beatriz, Cláudia, Denise e Eduarda disputam uma corrida. Quais são os resultados de pódio (1º, 2º e 3º lugares) possíveis de ocorrer.

Digamos que Ana, Beatriz e Claudia são mais velozes que Denise e Eduarda de modo que dois possíveis resultados são (A,B,C) e (B,A,C). O resultado (A,B,C) é diferente do resultado (B,A,C) . Aqui, trocando a ordem, o resultado é diferente. Logo a ordem importa. Na corrida dessas 5 garotas, temos um ARRANJO DE 5 ELEMENTOS EM GRUPOS DE 3, simbolizados por $A_{5,3}$

Fórmula:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemplos:

1) Considere o conjunto I = {a,b,c,d}:
   Quantos são os arranjos simples dos elementos de I, tomados dois a dois?

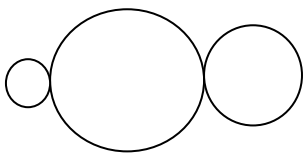
Como o exercício já informou que se trata de um arranjo simples, devemos retirar os dados e aplicá-los na fórmula.

n = 4

p = 2

$$A_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$$

2) O logotipo de uma empresa é representado pelos 3 círculos a seguir:



Ainda não foram escolhidas as cores que serão usadas para colorir cada círculo. O departamento de marketing sugeriu o uso de Azul, Laranja, Verde, Branco, Gelo e Preto. Sabendo que cada círculo será pintado de uma cor diferente, determine:

a) O número de maneiras de colorir o logotipo.

Raciocínio: digamos que escolhemos as cores A, L e V:(A,L,V) ≠ (L,A,V) , logo a ordem importa. Temos um arranjo de 6 cores em grupos de 3

$$A_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6.5.4.3!}{3!} = 6.5.4 = 120$$

b) Se Laranja obrigatoriamente deve ser uma das cores, Quantas maneiras possíveis de colorir o logotipo?

Raciocínio: Laranja pode ocupar um dos 3 círculos, logo há 3 possibilidades do laranja entrar. A cada entrada de laranja os outros dois círculos restantes podem ser pintados com as cinco cores restantes: logo o total de possibilidades é:

$$3 \cdot A_{5,2} = 3 \cdot \frac{5!}{(5-2)!} = 3 \cdot \frac{5!}{3!} = 3 \cdot \frac{5.4.3!}{3!} = 3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$$

Exercícios:

17) Determinar quantos são os números de três algarismos, múltiplos de 5, cujos algarismos das centenas pertencem a {1,2,3,4} e os demais algarismos a {0,5,6,7,8,9}.

18) (Fatec 2002) Durante a Copa do Mundo, que foi disputada por 24 países, as tampinhas de Coca-Cola traziam palpites sobre os países que se classificariam nos três primeiros lugares (por exemplo: 1º lugar, Brasil; 2º lugar, Nigéria; 3º lugar, Holanda). Se, em cada tampinha, os três países são distintos, quantas tampinhas diferentes poderiam existir?
19) Atualmente, as placas dos veículos são formadas por três letras seguidas de quatro algarismos. Considerando estas informações, calcule o número de placas distintas que podem ser fabricadas, iniciadas pelas letras HUI, nesta ordem, e cujo último algarismo seja ímpar.
20) Uma pessoa vai retirar dinheiro num caixa eletrônico de um banco mas, na hora de digitar a senha, esquece-se do número. Ela lembra que o número tem 5 algarismos, começa com 6, não tem algarismos repetidos e tem o algarismo 7 em alguma posição. Qual é o número máximo de tentativas para acertar a senha?
21) O número de múltiplos de 10, compreendidos entre 100 e 9999 e com todos os algarismos distintos, é:
22) Ana dispunha de papéis com cores diferentes. Para enfeitar sua loja, cortou fitas desses papéis e embalou 30 caixinhas de modo a não usar a mesma cor no papel e na fita, em nenhuma das 30 embalagens. A menor quantidade de cores diferentes que ela necessitou utilizar para a confecção de todas as embalagens foi igual a:
23) Em um campeonato de tênis de mesa, com dez participantes, em que todos jogam contra todos, um dos participantes vence todas as partidas, as classificações possíveis para os três primeiros colocados é:

24) (OSEC-SP) Uma faculdade mantém 8 cursos diferentes. No vestibular, os candidatos podem fazer opção por 3 cursos, determinando-os por ordem de preferência. Então, o número de possível de formas de optar é:
a) 6.720 b) 336 c) 520 d) 120 e) 56

25) (UFPE 2004) O mapa a seguir representa as regiões em que está dividido o Brasil. Cada região do mapa deve ser colorida de modo que regiões com uma fronteira comum tenham cores distintas (por exemplo, as regiões Sul e Sudeste devem ter cores diferentes, enquanto as regiões Sul e Nordeste podem ter a mesma cor). Tendo como base essa condição, é correto afirmar:

Soma ( )

ferentes são
mapa.
is cinco cores,
s diferentes de
ada um desses
as 5 cores.
s cinco cores, e
Nordeste e Sul
istem somente
es de colorir o

is cinco cores,
iões Nordeste
a cor, assim
te e Sudeste,
os diferentes

6.4.4 - Combinação:

Os agrupamentos formados com os elementos de um conjunto serão considerados combinações simples se os elementos dos agrupamentos diferenciarem apenas pela sua natureza. Ou seja, a ordem não importa (combinação rima com não).

Por exemplo: Agora as garotas do exemplo do item anterior, Ana, Beatriz, Cláudia, Denise e Eduarda querem montar um time de três pessoas. Digamos que o time seja formado por Ana, Beatriz e Cláudia. Ora, (A, B, C) ou (A, C, B) são o mesmo time. Trocar a ordem das garotas não muda o time. A ordem não importa. Temos uma combinação de 5 pessoas em grupos de 3, simbolizados por $C_{5,3}$

Fórmula:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Exemplos:

1) De quantos modos distintos Lucas pode escolher 4 entre 9 camisas regatas que possui para levar em uma viagem?

Raciocínio: digamos que Lucas tenha escolhido as regatas de cor verde, amarelo, cinza e branco, formando o conjunto (V,A,C,B) . mudando a ordem das camisas , o conjunto delas na mala é o mesmo. Logo a ordem não importa. Temos uma combinação de 9 camisas em grupos de 4:

$$C_{9,4} = \frac{9!}{4! \cdot (9-4)!} = \frac{9!}{4! \cdot 5!} = \frac{9.8.7.6.5!}{4! \cdot 5!} = \frac{9.8.7.6}{4!} = \frac{9.8.7.6}{4.3.2.1} = \frac{3024}{24}$$

= 126

2) Em um refeitório há doces e salgados. Cada pessoa receberá um recipiente com 3 doces, dos 8 tipos disponíveis e apenas 2 salgados, dos 7 tipos fabricados. Quantas são as diferentes possibilidades de preenchimento do recipiente?

Raciocínio: Estamos trabalhando com **combinação,** pois não importa a ordem de preenchimento dos recipientes. No caso dos doces vamos calcular $C_{8,3}$:

$$C_{8,3} = \frac{8!}{3!\,(8-3)!} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8.7.6.5!}{3! \cdot 5!} = \frac{8.7.6}{3!} = \frac{8.7.6}{3.2.1} = 56$$

Já no caso dos salgados vamos calcular $C_{7,2}$:

$$C_{7,2} = \frac{7!}{2!\,(7-2)!} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{7.6.5!}{2! \cdot 5!} = \frac{7.6}{2!} = 21$$

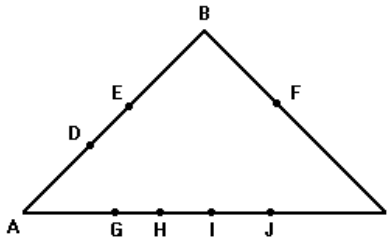
Para cada uma das 56 possibilidades de doce há 21 possibilidades de salgados, logo a possibilidade total é de

56.21=1176

Exercícios:

26) Dentre 4 moças e 5 rapazes deve-se formar uma comissão de 5 pessoas com, pelo menos, 1 moça e 1 rapaz. De quantas formas distintas tal comissão poderá ser formada?
27) Nove times de futebol vão ser divididos em 3 chaves, todas com o mesmo número de times, para a disputa da primeira fase de um torneio. Cada uma das chaves já tem um cabeça de chave definido. Nessas condições, o número de maneiras possíveis e diferentes de se completarem as chaves é:
28) Uma prova consta de 3 partes, cada uma com 5 questões. Cada questão, independente da parte a que pertença, vale 1 ponto, sendo o critério de correção "certo ou errado". De quantas maneiras diferentes podemos alcançar 10 pontos nessa prova, se devem ser resolvidas pelo menos 3 questões de cada parte e 10 questões no total?
29) São dados 12 pontos num plano, 3 a 3 não colineares. O número de retas distintas determinadas por esses pontos é:

30) (Unirio 2000) Observe a figura.



ɔs
ıtos

6.4.5 – Permutação Cíclica:

Numa **permutação cíclica** considera-se uma ordem que se inicia num objeto qualquer e termina em um antes dele, como um conjunto de pessoas em volta de uma mesa circular.

Fórmula:

$$Pc_n = (n-1)!$$

Exemplo:

Seja um conjunto com 4 pessoas. De quantos modos distintos estas pessoas poderão sentar-se junto a uma mesa circular para realizar o jantar sem que haja repetição das posições?

$$Pc_4 = (4-1)! = 3! = 3.2.1 = 6$$

Exercicios:

31)De quantos modos distintos 10 pessoas poderão sentar-se sem que haja repetições numa mesa

a) circular

b) triangular

32) Dois meninos e três meninas formarão uma roda dando-se as mãos. De quantos modos diferentes poderão formar a roda de modo que dois meninos não fiquem juntos?

PROBABILIDADE

7.1 – INTRODUÇÃO

A probabilidade é uma medida da incerteza dos fenômenos naturais ou humanos que se traduz por um número real compreendido de 0 (zero) e 1 (um) [ou, multiplicados por um fator 100, de 0(zero) a cem (100)].

Por exemplo:

- Qual a probabilidade de nascer uma criança do sexo masculino?
- Um pesquisador verifica que, dentre 1000 casos de cirrose hepática, 40 evoluíram para câncer. Com base nessa experiência, qual a probabilidade da cirrose se tornar cancerosa?

7.2 - Experimentos Aleatórios, Espaços Amostrais e Eventos

Um **experimento aleatório** é todo aquele cujos resultados, mesmo quando repetidos diversas vezes **sob as mesmas condições**, não podem ser previstos (com certeza) antes da execução do mesmo, como por exemplo:

- O resultado de uma partida de futebol
- O sorteio da Mega-sena
- O nível de satisfação dos clientes sobre um serviço ou produto

O espaço amostral de um experimento aleatório é o conjunto de todos os resultados possíveis desse experimento. Denotaremos por U este conjunto.

Exemplos

Experimento	Espaço amostral (U)
Lançamento de um dado	{1, 2, 3, 4, 5, 6}
Pesquisa de satisfação	{"regular", "bom", "ótimo"}
Risco econômico de Crédito	{"baixo", "médio", "alto"}
Temperatura no Verão	Valores reais no intervalo [10 ^{o}C , 60 ^{o}C]
Lançar duas moedas	U = {(c, r), (c,c), (r,c), (r,r)} c: cara, r: coroa
Retirar uma carta de um baralho completo, com 52 cartas	U = {A_0,$1_{0,}$ ..., K_0, A_p, $1_{P,}$ ..., K_p, A_E, $1_{E,}$ .., K_E, A_C, $1_{C,}$..., K_C} (Índices O: ouros, P: Paus, E: espada, C: Copas)

Evento é qualquer subconjunto do espaço amostral do experimento aleatório.

Exemplos

- Num lançamento de dados, um possível evento é: o Número apresentado na face para cima ser par, neste caso E = {2,4,6}
- Num lançamento de uma moeda sair cara para cima: E = {c}
- Ao retirar uma carta de um baralho completo, com 52 cartas sair 3 de qualquer naipe: E = {3_O, 3_P, 3_E, 3_C}

Evento certo: Quando coincidir com o espaço amostral. Por exemplo: Num lançamento de dados obter um número natural menor que 7

Evento impossível: Quando não se encontra no espaço amostral. Neste caso E = { } (conjunto vazio) . Por exemplo: Num lançamento de dados obter um número natural maior que 7.

7.3- Conceito de Probabilidade

A probabilidade de realização de um acontecimento **A** é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis à sua realização e o número total de casos possíveis, desde que estes sejam

igualmente prováveis.

$$P(A) = \frac{Número de casos favoráveis}{Número de casos possíveis} = \frac{n(E)}{n(U)}$$

Esta fórmula é conhecida por **Lei de Laplace**.

n(E) é o número de elementos do conjunto de eventos

n(U) é o número de elementos do conjunto do espaço amostral.

Considere-se o seguinte caso prático:

"Concurso da Roda da Sorte"

Asdrúbal ganha um automóvel se "**sair preto**" na roleta da figura abaixo

Qual é a probabilidade do Asdrúbal ganhar o prêmio?

A roda da sorte representada na figura está dividida em 8 setores iguais com igual possibilidade de saírem.

Fonte: http://rainorv.blogspot.com.br/2009/05/nocoes-de-probabilidade.html

Há 8 setores na roda e apenas 2 são pretos, ou seja, há 8 casos possíveis e 2 favoráveis.

Como há 2 "casos favoráveis" à saída do preto em "8 casos possíveis", diz-se que, a probabilidade de "sair preto" é de 2 em 8.

Número de casos favoráveis

$$P(sair\ preto) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Número de casos possíveis

Escreve-se:

Logo, a probabilidade do Asdrúbal ganhar o prêmio é 1/4.

Obs.: Resolvendo a fração P(sair preto) = ¼ = 0,25.

Em geral multiplica-se a probabilidade por um fator 100 eutiliza-se a expressão “por cento” (símbolo %)

P(sair preto) = ¼ = 0,25= 0,25. 100 % = 25 %

E qual será a probabilidade do Asdrúbal perder?

Neste caso há 6 casos favoráveis à "**saída do branco**" (pois saindo o branco Asdrúbal perde) em 8 casos possíveis, isto é, 6/8.

Escreve-se:

$$P(sair\ branco) = \ P(Asdrúbal\ perde) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Ou *P(sair branco) = ¾ = 0,75 = 75 %*

Exemplos:

1) No lançamento simultâneo de uma moeda e um dado, determinar

a) O espaço amostral
b) O número de elemento de evento E_1: sair coroa na moeda e face par no dado
c) A probabilidade do evento E_1
d) A probabilidade do evento E_2: sair face 3 no dado
e) A probabilidade do evento E_3: sair coroa na moeda

a) U = {(c,1), (c,2), (c,3) (c,4), (c,5), (c,6), (r,1), (r,2), (r,3) (r,4), (r,5), (r,6) }

n(U) = 12

b) E_1 = { (r,2), (r,4), (r,6) }, logo n(E_1) = 3

c)

$$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{N(U)} = \frac{3}{12} = 0{,}25 = 25\%$$

d) E_2 = { (c,3),(r,3) } logo n(E_2) = 2

$$P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(U)} = \frac{2}{12} = 0{,}1666\ldots = 16{,}66\,\%$$

e) E_3 = {(r, 1), (r,2), (r,3) (r,4), (r,5), (r,6) } logo $n(E_3) = 6$

$$P(E_3) = \frac{6}{12} = 0{,}5 = 50\%$$

2) Uma equipe é formada por nove homens e três mulheres. Dessas pessoas, duas serão sorteadas para compor uma comissão. Qual é a probabilidade de a comissão ser formada por

a) duas mulheres

O espaço amostral é formado de grupos de 2 pessoas homens e mulheres não importando a ordem, logo é uma combinação de 12 pessoas em grupos de 2 a 2 :

$$n(U) = C_{12,2} = \frac{12!}{2! \cdot (12-2)!} = \frac{12!}{2! \cdot 10!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10!}{2 \cdot 10!} = 66$$

O conjunto de eventos para duas mulheres num total de três é uma combinação de 3 em grupos de 2:

$$n(E) = C_{3,2} = \frac{3!}{2! \cdot (3-2)!} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 1} = 3$$

$$P(E) = \frac{3}{66} = \frac{1}{22} = 0{,}045 = 4{,}5\%$$

b) dois homens

$$n(E) = C_{9,2} = \frac{9!}{2! \cdot (9-2)!} = \frac{9!}{2! \cdot 7!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{2 \cdot 1 \cdot 7!} = 36$$

$$P(E) = \frac{36}{66} = 0{,}5454 = 54{,}54\%$$

c) um homem e uma mulher.

Para cada um dos 9 homens temos a opção de escolher uma das 3 mulheres , logo

n(E) = 9.3 = 27

$$P(E) = \frac{27}{66} = 0{,}4090 = 40{,}9\%$$

Exercícios

33)Qual é a probabilidade de um dos cem números 1, 2, 3, 4, ..., 100 ser múltiplo de 6 e de 10 ao mesmo tempo ?

34) Tomando-se, ao acaso, uma das retas determinadas pelos vértices de um pentágono regular, a probabilidade de que a reta tomada ligue dois vértices consecutivos é:

35)Uma bola será retirada de uma sacola contendo 5 bolas verdes e 7 bolas amarelas. Qual a probabilidade desta bola ser verde?

36)Três moedas são lançadas ao mesmo tempo. Qual é a probabilidade de as três moedas caírem com a mesma face para cima?

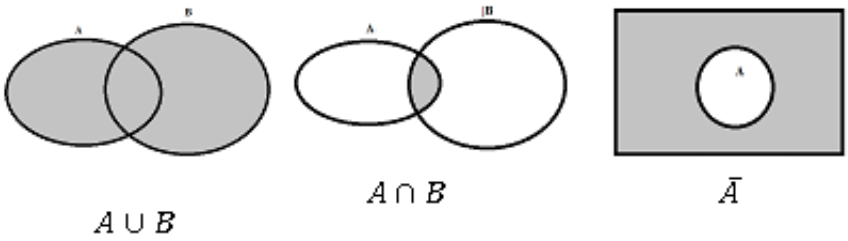
37) Dois dados cúbicos, não viciados, com faces numeradas de 1 a 6, serão lançados simultaneamente. Qual é a probabilidade de que sejam sorteados dois números consecutivos, cuja soma seja um número primo?

38) (Uece 99) Suponha que uma universidade passe a preencher suas vagas por sorteio dos candidatos inscritos ao invés de fazê-lo por meio de um exame vestibular. Sabendo que 10% das matrículas dessa universidade são de candidatos chamados na 2ª lista (na qual não figuram nomes da 1ª lista), determine a probabilidade de ingresso de um candidato cujo nome esteja na 2ª lista de sorteados num curso que tenha 1400 inscritos para 70 vagas.

39) Numa loteria seis números de 1 a 100 são sorteados sem repetição. Qual a probabilidade de uma pessoa ganhar na loteia fazendo apenas um jogo de seis números?

7.4 – Operações com Probabilidade

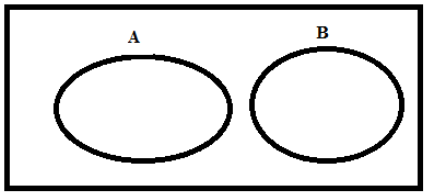
Operação	Notação	Conjunto	Evento
União	$A \cup B$	Reúne os elementos de ambos os conjuntos	Quando ocorrer pelo menos um deles (A, B ou ambos)
Interseção	$A \cap B$	Formado somente pelos elementos que estão em A e B	Quando ocorrer ambos os eventos (A e B)
Complementar	$\bar{A}$	Formado pelos elementos que não estão em A	Quando não ocorrer o evento A (não A)



$A \cup B$ $A \cap B$ $\bar{A}$

Eventos são mutuamente exclusivos se e só se eles **não** puderem ocorrer simultaneamente. Ou seja, para 2 eventos quaisquer, temos que:

Se A e B são mutuamente exclusivo, então $A \cap B = \{\}$:



7.4.1- Probabilidade da união de dois eventos

Fórmula da probabilidade de ocorrer a união de eventos:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

De fato, se existirem elementos comuns a E_1 e E_2, estes eventos estarão computados no cálculo de $P(E_1)$ e $P(E_2)$. Para que sejam considerados uma vez só, subtraímos $P(E_1 \cap E_2)$

Fórmula de probabilidade de ocorrer a união de eventos mutuamente exclusivos:

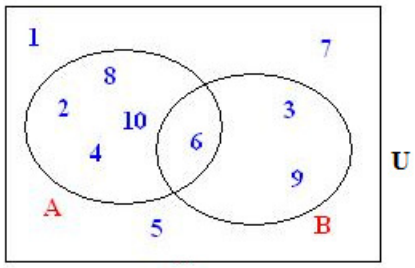
$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

,

uma vez que então $A \cap B = \{\}$:

Exemplos:

1) Numa urna existem 10 bolas numeradas de 1 a 10. Retirando uma bola ao acaso, qual a probabilidade de ocorrer múltiplos de 2 ou múltiplos de 3?
Resolução:
Ilustremos o espaço amostral tal como a figura abaixo onde:
A é o evento "múltiplo de 2". n(A) = 5
B é o evento "múltiplo de 3". n(B) = 3



$A \cap B = \{6\}$. $n(A \cap B) = 1$

U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} n(U) = 10

- $P(A) = \frac{5}{10}$
- $P(B) = \frac{3}{10}$
- $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{10} + \frac{3}{10} - \frac{1}{10} = \frac{7}{10} = 0{,}7 = 70\%$$

2) Se retirarmos aleatoriamente uma carta de baralho com 52 cartas, qual a probabilidade de ser um oito ou um rei?

Sendo S o espaço amostral de todos os resultados possíveis, temos: n(U) = 52 cartas.
Considere os eventos:
A: sair 8
A= $\{8_O, 8_C, 8_P, 8_E\}$
n(A) = 4
P(A) = n(A) /n(U) = 4/52

B: sair um rei
B = $\{K_O, K_C, K_P, K_E\}$
n(B) = 4
P(B) = n(B) /n(U) = 4/52

Não é possível uma carta ser de 8 e rei ao mesmo tempo logo .Quando isso ocorre dizemos que os eventos A e B são mutuamente exclusivos.

$$P(A \cap B) = 0$$

Assim,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{52} + \frac{4}{52} - 0 = \frac{8}{52} = 0{,}1538 = 15{,}38\%$$

Exercícios

40)Em uma caixa há 2 fichas amarelas, 5 fichas azuis e 7 fichas verdes. Se retirarmos uma única ficha, qual a probabilidade dela ser verde ou amarela?

41)De uma sacola contendo 15 bolas numeradas de 1 a 15 retira-se uma bola. Qual é a probabilidade desta bola ser divisível por 3 ou divisível por 4?

42)Numa classe há 16 homens e 20 mulheres, dos quais metade dos homens e metade das mulheres têm cabelos castanhos. Ao escolher um aluno ao acaso, qual é a probabilidade de que seja homem ou tenha cabelos castanhos?

43) De uma reunião participam 200 profissionais, sendo 60 médicos, 50 dentistas, 32 enfermeiras e os demais nutricionistas. Escolhido ao acaso um elemento do grupo, qual é a probabilidade de ele ser médico ou dentista?

7.5- Probabilidade condicional

A probabilidade de um evento A ocorrer, dado que outro evento B ocorreu, é chamada probabilidade condicional do evento A dado B.

Por exemplo, a probabilidade de que uma pessoa venha a contrair AIDS dado que ele/ela é um usuário de drogas injetáveis é uma probabilidade condicional.

Outro exemplo, é um estudo sobre panfletos de supermercado, em que se deseja calcular a probabilidade de que um panfleto de propaganda seja jogado no lixo dado que contém uma mensagem sobre o cuidado de depositar lixo no lixo.

Com dois eventos, A e B, a probabilidade condicional de A dado B é denotada por ,

$$P(A|B)$$

Nos exemplos acima, portanto, tínhamos: P(AIDS | usuário de drogas) e P(lixo|mensagem).

Exemplo:. Suponha que pesquisa tenha amostrado 100 pessoas, 20 das quais tinham crianças. Eles observaram que 30 dessas pessoas usavam cinto de segurança, e que 15 daquelas pessoas tinham crianças.

Paternidade	**Usam cinto**	**Não usam cinto**	**Total**
Com crianças	15	5	20
Sem crianças	15	65	80
Total	30	70	100

A partir da informação na Tabela podemos calcular probabilidades simples e condicionais:

- A probabilidade de uma pessoa amostrada aleatoriamente usar cinto de segurança é 30/100=0,30.
- A probabilidade de uma pessoa ter criança e usar cinto de segurança é 15/100=0,15.
- A probabilidade de uma pessoa usar cinto de segurança dado que tem criança é 15/20=0,75.
- A probabilidade de uma pessoa ter criança dado que usa cinto de segurança é 15/30=0,50.

A probabilidade condicional também pode ser obtida por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Esta expressão pode ser reescrita como:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Exemplo:
Uma amostra de 6800 pessoas de uma determinada população foi classificada quanto à cor dos olhos e à cor dos cabelos. Os resultados foram:

	Cor dos cabelos				
Cor dos olhos	Loiro	Castanho	Preto	Ruivo	Total
Azul	1768	807	189	47	2811
Verde	946	1387	746	53	3132
Castanho	115	438	288	16	857
Total	2829	2632	1223	116	6800

a) Qual a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso da população ter olhos azuis dado que possui cabelos loiros?

$$P(A|L) = \frac{P(A \cap L)}{P(L)} = \frac{1768/6800}{2829/6800} = \frac{1768}{2829} = 0,6250$$

Observe que quando condicionamos em L, restringimos o espaço amostral ao conjunto das pessoas loiras. Note queos eventos A e L não são independentes pois

$$P(A) = \frac{2811}{6800} = 0,4134$$

e

$$P(A|L) = \frac{1768}{2829} = 0,6249$$

b) Qual a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso da população ter cabelos loiros dado que tem olhos castanhos?

$$P(L|C) = \frac{P(L \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{115}{6800}}{\frac{857}{6800}} = 0,1342 = 13,42\%$$

7.5 – Eventos independentes

Se os eventos A e B forem independentes, então não há nada que condicione o evento A ao evento B, portanto:
P(A|B) = P(A)

e a probabilidade da interseção torna-se:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Exemplos:
1) Uma urna possui 50 bolas, sendo 20 bolas vermelhas e 30 bolas amarelas. Ao sortearmos 2 bolas, uma de cada vez com reposição de bola na urna sorteada, qual será a probabilidade da 1º bola ser vermelha e a 2ª ser amarela?
Resolução:

$$P(V) = \frac{20}{50} \quad \text{e} \quad P(A) = \frac{30}{50}$$

Em virtude da reposição, os sorteios são independentes, pois o fato de termos escolhido a 1ª bola e a termos recolocado na urna não afeta a escolha d 2ª bola. Logo:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{20}{50} \cdot \frac{30}{50} = \frac{600}{2500} = 0{,}24 = 24\%$$

2) Cinco amigos, Cacá, Quequé, Quiqui, Cocó e Mário, vão juntos a uma caçada. As suas pontarias são muito diferentes: Cacá acerta uma vez a cada dez tiros; Quequé, duas vezes a cada dez; Quiqui, três a cada dez; Cocó, quatro a cada dez; e Mário, cinco a cada dez. Uma lebre é vista pelos cinco atiradores. Se os cinco caçadores atirarem simultaneamente, qual é a probabilidade da lebre ser alvejada por todos eles?

Resolução: A pontaria de um amigo não afeta ou influi na pontaria de outro, logo cada tiro dos amigos é independentes

P(Cacá) =1/10

P(Quequé) = 2/10

P(Quiqui) = 3/10

P(Cocó) = 4/10

P(Mário) = 5/10

$$P(\text{todos acertarem}) = P(Caca \cap Queque \cap Quiqui \cap Coco \cap Mario)$$
$$= \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{120}{100000} = 0{,}0012 = 0{,}12\%$$

Exercícios

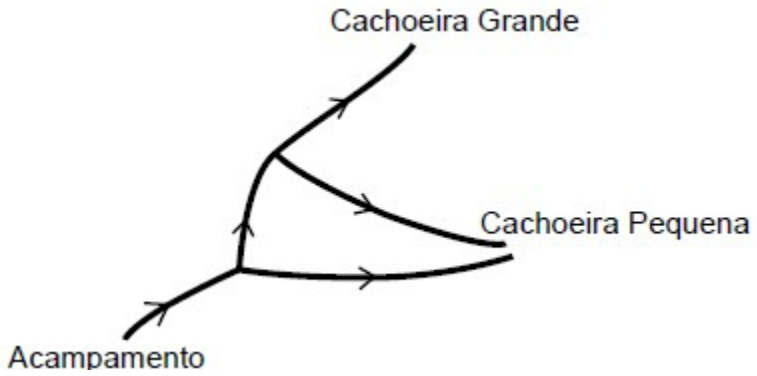
44)Num grupo de 100 pessoas da zona rural, 25 estão afetadas por uma parasitose intestinal A e 11 por uma parasitose intestinal B, não se verificando nenhum caso de incidência conjunta de A e B. Duas pessoas desse grupo são escolhidas, aleatoriamente, uma após a outra.

Determine a probabilidade de que, dessa dupla, a primeira pessoa esteja afetada por A e a segunda por B.

45)No jogo da sena seis números distintos são sorteados dentre os números 1, 2,....., 50. Qual é a probabilidade de que, numa extração, os seis números sorteados sejam ímpares ?

46)Em uma caixa há 4 bolas verdes, 4 azuis, 4 vermelhas e 4 brancas. Se tirarmos sem reposição 4 bolas desta caixa, uma a uma, qual a probabilidade de tirarmos nesta ordem bolas nas cores verde, azul, vermelha e branca?

47) (Uerj 2001) Dois jovens partiram, do acampamento em que estavam, em direção à Cachoeira Grande e à Cachoeira Pequena, localizadas na região, seguindo a trilha indicada neste esquema:



Em cada bifurcação encontrada na trilha, eles escolhiam, com igual probabilidade, qualquer um dos caminhos e seguiam adiante. Então, é CORRETO afirmar que a probabilidade de eles chegarem à Cachoeira Pequena é:

a) ½ b) 2/3 c) ¾ d) 1/8

48) (Fatec 2002) Em um jogo de bingo são sorteadas, sem reposição, bolas numeradas de 1 a 75, e um participante concorre com a cartela reproduzida abaixo. Qual é a probabilidade de que os três primeiros números sorteados estejam nessa cartela?

B	I	N	G	O
5	18	33	48	64
12	21	31	51	68
14	30		60	71
13	16	44	46	61
11	27	41	49	73

7.6 – Probabilidade complementar

Seja A um evento do espaço amostral U. Chamamos de evento complementar de A o evento $\bar{A}$, tal que:

$$\text{i) } A \cap \bar{A} = \{\}$$
$$\text{ii) } A \cup \bar{A} = U$$

Como A e$\bar{A}$são mutuamente exclusivos, teremos:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Exemplos:

1) Se Cacá acerta o alvo com probabilidade de 1/10 então a probabilidade de errar (evento complementar) é 1-1/10 = 9/10 (ele não pode acertar e errar ao mesmo tempo).

2) Na amostra populacional dada pela tabela Qual a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso da população não ter cabelos loiros dado que tem olhos castanhos?

	Cor dos cabelos				
Cor dos olhos	Loiro	Castanho	Preto	Ruivo	Total
Azul	1768	807	189	47	2811
Verde	946	1387	746	53	3132
Castanho	115	438	288	16	857
Total	2829	2632	1223	116	6800

$$P(\bar{L}|C) = 1 - P(L|C) = 1 - \frac{115/6800}{857/6800} = 1 - 0,1342 = 0,8658$$

Exercícios:

49)Um casal pretende ter filhos. Sabe-se que a cada mês a probabilidade da mulher engravidar é de 20%. Qual é a probabilidade dela vir a engravidar somente no quarto mês de tentativas?

50) As probabilidades de três jogadores marcarem um gol cobrando pênalti são, respectivamente, 1/2, 2/5, e 5/6. Se cada um bater um único pênalti, a probabilidade de todos errarem é igual a:

a)3% b)5% c)17% d)20% e) 25%

51) No lançamento de dois dados, determine a probabilidade da soma das faces para cima não der quatro

52) (Ufscar 2000) Na pesquisa do último censo verificou-se que 3% dos eleitores brasileiros possuem 75 anos ou mais e que 57,1% desses mesmos eleitores são do sexo feminino. Se escolhermos um eleitor dentre os mais de 180 milhões de eleitores do país, qual é a probabilidade desse eleitor ser do sexo masculino e ter mais de 75 anos?

Gabarito

1) 11
2) 8000000
3) 8
4) 10000
5) 32
6) a)30 b)114 c)24 d)2520
7) a)12!/8! b)66!/2!·6 3!
8) 8
9) 4
10) e
11) 5040
12) x= 48 y = 36
13) 600
14) a)6 b)48
15) 30240
16) 42
17) 48
18) 12144
19) 5000
20) 1344
21) 576
22) 6
23) 72
24) B
25) 01 + 02 + 08 = 11
26) 125
27) 90
28) 1500
29) 66
30) 31
31) a) 322880 b)322880
32) 12
33) 3%
34) ½
35) 5/12
36) 25%
37) 8/36 = 2/9
38) 7/1330 = 1/190
39) 1/1192052361
40) 9/14
41) 7/15
42) 72,2%
43) 55%
44) 1/36
45) 1,11%
46) 8/1365
47) c
48) 3%
49) 10,24%
50) b
51) 11/12
52) 1,29 %

Referências bibliográficas:

DANTE. Matemática. Contexto e Aplicações. Volume único. Editora Ática. 2004.
GIOVANNI, José Ruy. BONJORNO, José Roberto. Matemática-uma nova abordagem. Editora FTD, 2000. Vol. 1,2,3.
SMOLE, Kátia Stocco. Matemática. Ensino Médio. Vol. I, II, III. Ed. Saraiva, 2003.
SOUZA, Joamir, Matemática-Novo Olhar. Ensino Médio. Vol. 1, 2, 3. Ed. FTD. 2010.

https://www.educacao.mg.gov.br/politica-de-privacidade/page/15089-supletivo
http://rainorv.blogspot.com.br/2009/05/nocoes-de-probabilidade.html
https://pir2.forumeiros.com/t73178-analise-combinatoria
https://brainly.com.br