Unidade 2

Funções

A função é um conceito matemático que encontra aplicações em diversas áreas do conhecimento e em situações práticas que aparecem no nosso dia-a-dia. Nesta unidade veremos a noção intuitiva de função, sua definição formal, alguns exemplos e também as funções polinomiais de 1 e 2 graus.

Para começarmos o nosso estudo, vamos apresentar alguns exemplos de situações que podem ser traduzidas para uma linguagem matemática através de funções.

Exemplo: Um vendedor de água de coco vende cada copo de água de coco por R$2,30. Então, se comprarmos 1 copo, pagaremos R$2,30, se comprarmos 2 copos pagaremos R$4,60, se comprarmos 3 copos, pagaremos R$6,90 e assim por diante. Quanto pagaremos se comprarmos 10 copos de água de coco?

Observe que para sabermos o valor a ser pago, basta multiplicar o valor de cada copo pela quantidade de copos a serem comprados. Dessa forma teremos

$2{,}30 . 10 = 23{,}00$

Logo, pagaremos R$23,00 pelos 10 copos de água de coco.

Neste exemplo existe uma relação entre a quantidade de copos de água de coco e o preço a ser pago pela compra. Se chamarmos o preço de p e a quantidade de copos de água de coco a ser comprada de x, poderemos escrever :

$$\boxed{p = 2{,}30 \cdot x}$$

Observe que para cada valor de x existirá um único valor de p correspondente. Este é um exemplode função.

2.1 - Função Polinomial do 1ºgrau

É toda função do tipo $f(x) = a\,x + b$ ou $y = ax + b$ onde a e b são números reais e $a \neq 0$. Neste caso o a é chamado de coeficiente angular e b de coeficiente linear da função.

Exemplos:

a) $f(x) = 2x - 4$
b) $y = -x + 3$
c) $y = 2x$

Observação: toda função polinomial do 1º grau $y = ax + b$ em que $b = 0$ recebe o nome de <u>função linear</u>. Exemplos:

a) $y = 2x$ b) $y = \frac{x}{3}$ c) $y = -4x$

2.1.1- Raiz da função

A raiz de uma função f(x) = ax + b é o valor de x que torna f(x) = 0, ou seja, é o valor de x que torna nulo o valor de f(x). Quando estivermos estudando o gráfico da função, veremos que a raiz é a abscissa do ponto onde o gráfico corta o eixo x.

De acordo com a definição acima, vamos encontrar a raiz da função f(x) = ax + b fazendo f(x) = 0. Assim, teremos

$ax + b = 0$

$ax = -b$

$x = -\frac{b}{a} \rightarrow x = -\frac{b}{a}$ é a raiz da função polinomial do 1º grau

Exemplos:

1) Encontrar a raiz de f(x) = x – 4

Solução: Para encontrar a raiz de f(x) = x – 4 fazemos

$x - 4 = 0 \rightarrow x = 0 + 4 \rightarrow x = 4$

Logo x = 4 é a raiz da função dada.

2) Encontrar a raiz da função y = 2x + 4

Solução: Precisamos fazer 2x + 4 = 0 e resolver a equação. Assim

$2x + 4 = 0 \rightarrow 2x = 0 - 4 \rightarrow 2x = -4 \rightarrow x = \frac{-4}{2} \rightarrow x = -2$

Logo x = - 2 é a raiz da função.

3) Encontre a raiz da função y = - 2x + 3

Solução: Precisamos resolver a equação – 2x + 3 = 0. Temos

$-2x + 3 = 0 \rightarrow -2x = 0 - 3 \rightarrow -2x = -3 \rightarrow x = \frac{-3}{-2} \rightarrow x = \frac{3}{2}$

2.1.2 - Gráfico

O gráfico de uma função polinomial do 1º grau é uma reta. Para definirmos uma reta precisamos conhecer dois pontos distintos pertencentes a ela. Logo, para construirmos o gráfico de uma função polinomial do 1º grau precisamos de, no mínimo, 2 pontos distintos.

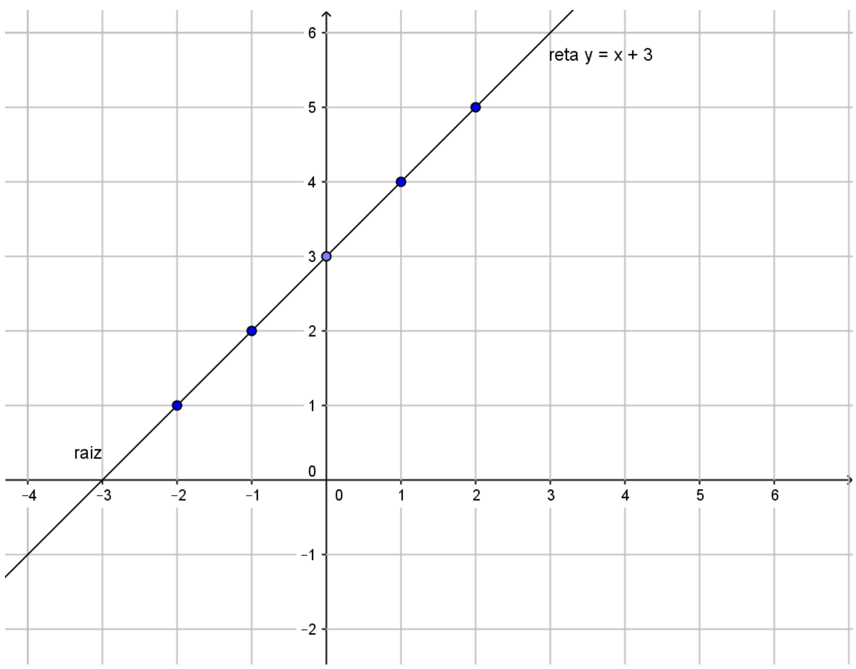
Vamos mostrar a seguir duas maneiras diferentes de construir o gráfico de uma função polinomial do 1º grau.

1) Através da construção de uma tabela de valores.

Para explicarmos este método, vamos considerar o seguinte exemplo: construir o gráfico da função y = x + 3.Começamos escolhendo alguns valores para x, por exemplo, -2, -1, 0, 1 e 2. A seguir, vamos calcular os valores de y correspondentes.

x	y
-2	y = -2 + 3 = 1
-1	y= -1+3 = 2
0	y = 0 + 3 = 3
1	y = 1 + 3 = 4
2	y= 2 + 3 = 5

Depois de completarmos a tabela, precisamos marcar os pontos determinados num plano cartesiano e unir esses pontos para obter o gráfico.



Observação:

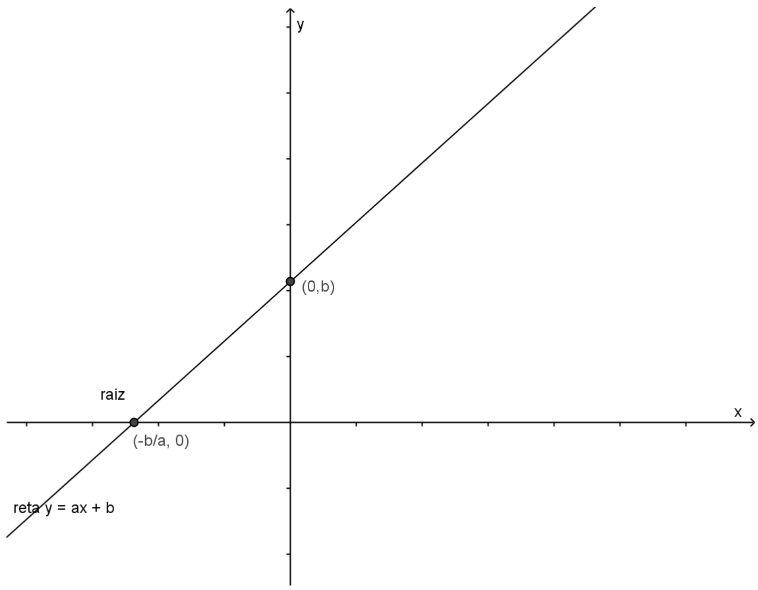
- Podemos escolher quaisquer valores para x na hora de montar a tabela.

- A reta y = x + 3 corta o eixo x no ponto (-3,0). Logo o valor x = -3 é chamado de raiz da função.

2) O segundo modo de construir o gráfico de uma função polinomial do 1º grau y = ax + b é determinarmos dois pontos específicos deste gráfico: os pontos de interseção da reta com os eixos x e y.

O ponto de interseção com o eixo x é o ponto $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$, pois $-\frac{b}{a}$ é a raiz da função e, como vimos anteriormente, a raiz é a abscissa do ponto onde o gráfico corta o eixo x.

O ponto de interseção com o eixo y é o ponto (0,b), pois quando o gráfico corta o eixo y temos x = 0.



Exemplos

1) Construir o gráfico da função y = 2x + 4

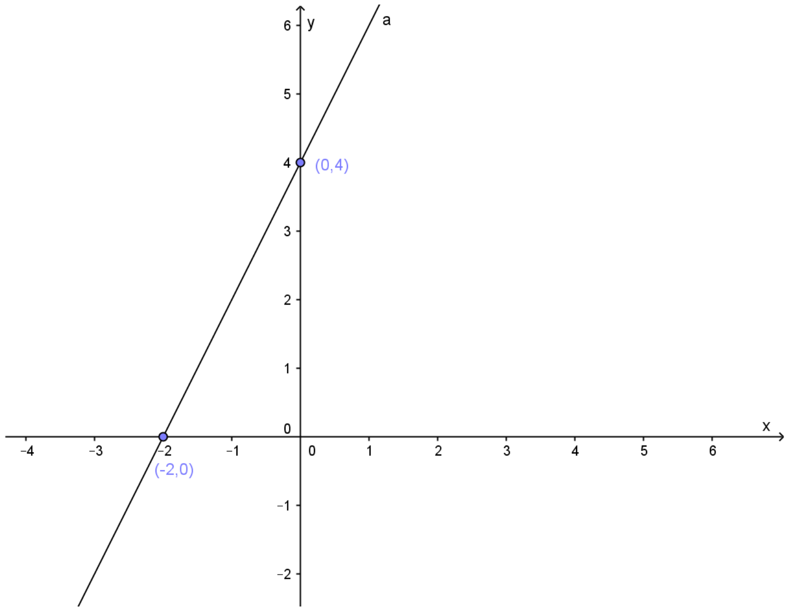
Solução: Para começar, vamos determinar a raiz da função. Para isso, fazemos

$2x + 4 = 0 \rightarrow 2x = 0 - 4 \rightarrow 2x = -4 \rightarrow x = -\frac{4}{2} \rightarrow x = -2$

Desse modo, o ponto de interseção do gráfico com o eixo x é (-2,0)

Agora, note que b = 4. Assim, o ponto de interseção do gráfico com o eixo y é (0,4).

Marcando esses dois pontos (-2,0) e (0,4) no plano cartesiano e unindo-os, obtemos o gráfico da função.



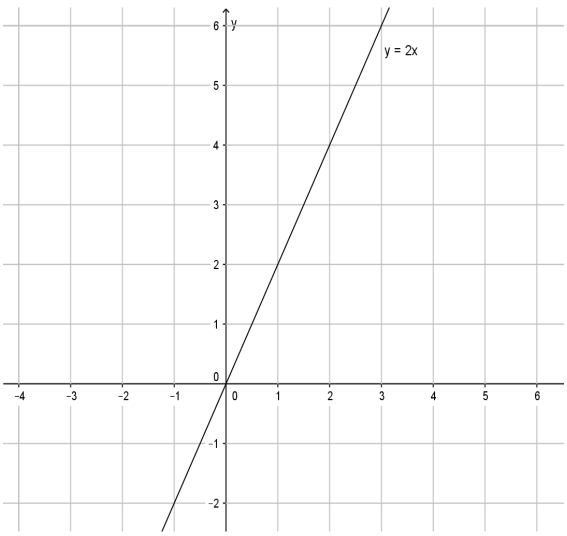
2.1.3. – Explorando o que representam os valores de a e b na função y = a.x + b

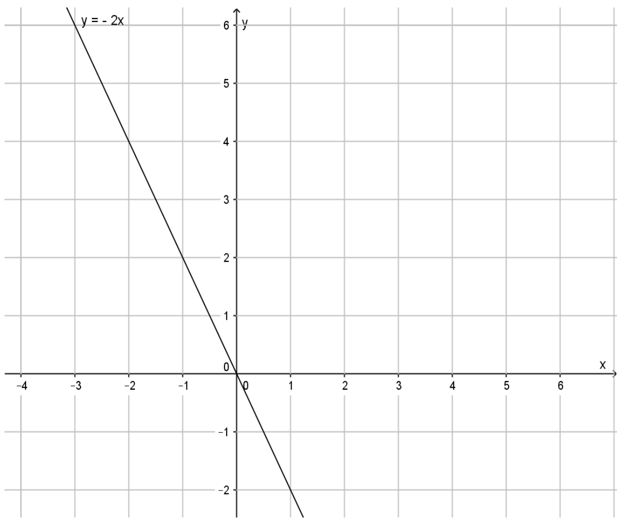
Vamos começar analisando os gráficos de y = 2x e de y = -2x.

Observe que a reta y = 2xé uma reta crescente e que y = -2x é decrescente. De modo geral, podemos dizer que quando a > 0 a função y = ax+ b é crescente e que quando a < 0 a função é decrescente.

Coeficiente angulara > 0 → função crescente

Coeficiente angulara < 0 → função decrescente

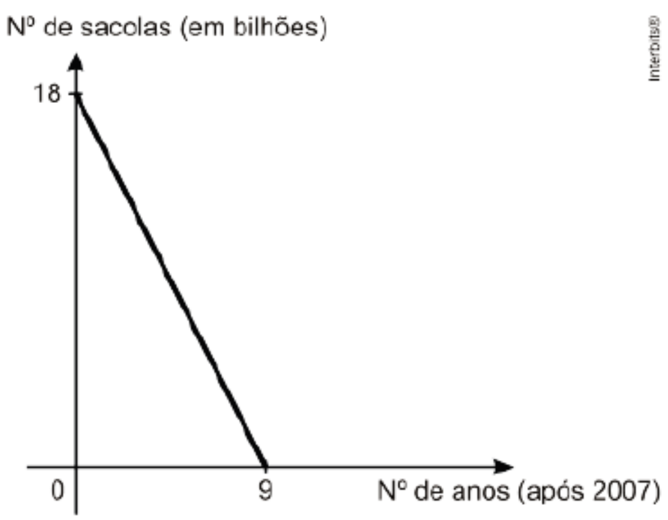




Exercícios Propostos

Atenção: Faça os exercícios sempre em seu caderno. Não escreva na apostila

1) (Enem 2ª aplicação 2010) As sacolas plásticas sujam florestas, rios e oceanos e quase sempre acabam matando por asfixia peixes, baleias e outros animais aquáticos. No Brasil, em 2007, foram consumidas 18 bilhões de sacolas plásticas. Os supermercados brasileiros se preparam para acabar com as sacolas plásticas até 2016. Observe o gráfico a seguir, em que se considera a origem como o ano de 2007.



LUCENA, M. Guerra às sacolinhas. **Galileu**. nº 225, 2010.

De acordo com as informações, quantos bilhões de sacolas plásticas serão consumidos em 2011?

a) 4,0 b) 6,5 c) 7,0 d) 8,0 e)10,0

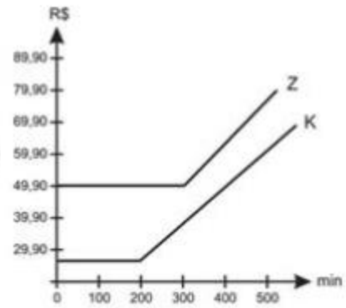
2) Para cada função abaixo, identifique o coeficiente angular e o coeficiente linear, diga se ela é crescente ou decrescente, calcule sua raiz e esboce o seu gráfico.
   a) y = x + 5
   b) y = -2x + 4
   c) y = 5x
   d) y = -3x
   e) $y = \frac{2x}{3}$

3) (http://exercicios.mundoeducacao.bol.uol.com.br) O gráfico da função ***f (x) = mx + n*** passa pelos pontos **(– 1, 3)** e **(2, 7)**. O valor de **m** é:
   a) 5/3 **b)** 4/3 **c)** 1 **d)** ¾ **e)** 3/5

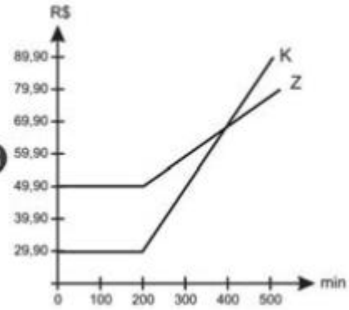
4) (Enem 2011) Uma empresa de telefonia fixa oferece dois planos aos seus clientes: no plano K, o cliente paga R$ 29,90 por 200 minutos mensais e R$ 0,20 por cada minuto excedente; no plano Z, paga R$ 49,90 por 300 minutos mensais e R$ 0,10 por cada minuto excedente.

O gráfico que representa o valor pago, em reais, nos dois planos em função dos minutos utilizados é:

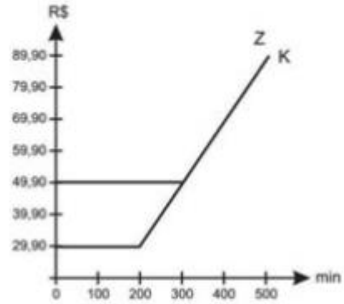
A



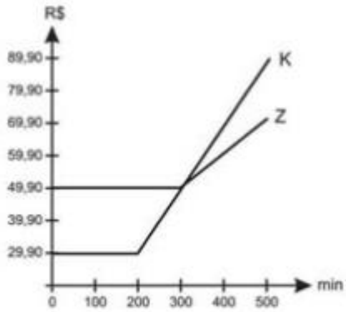
B



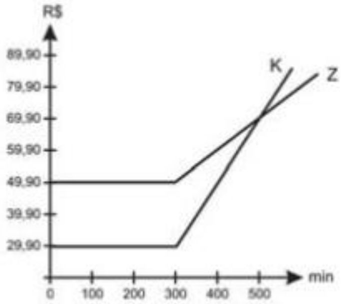
C



D

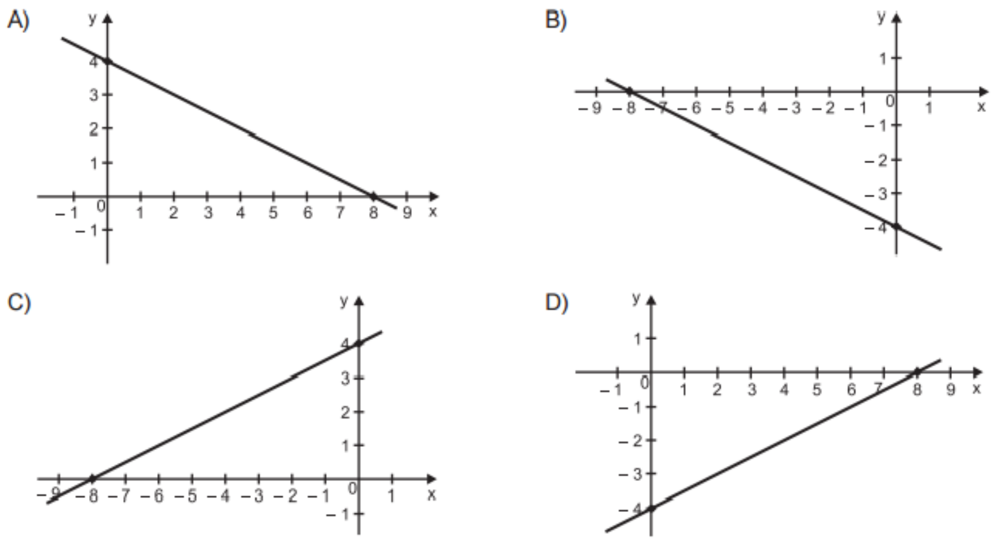


E



11)

Qual dos gráficos abaixo representa a função y = – 0,5x + 4?



2.2 – Função Polinomial do 2º grau

Uma função polinomial do 2º grau é da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c números reais e a ≠ 0.

Exemplos:

1) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

2) $y = 2x^2 + 4x$

3) $y = \frac{x^2}{3} - \frac{44}{5}$

2.2.1 – Raiz da função polinomial do 2º grau

A raiz de uma função $f(x) = ax^2 + bx + c$ é o valor de x que torna f(x) = 0, ou seja, é o valor de x que torna nulo o valor de f(x). Quando estivermos estudando o gráfico da função, veremos que a raiz é a abscissa do ponto onde o gráfico corta o eixo x.

De acordo com a definição acima, vamos encontrar a raiz da função

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Fazendo f(x) = 0, teremos

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Para resolver a equação acima podemos usar a fórmula de Báskara, que é a seguinte:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Assim, por exemplo, se quisermos encontrar as raízes da função $y = x^2 - 4x + 3$, faremos:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Para aplicar a fórmula de Báskara devemos identificar os coeficientes a, b e c. Daí

a = 1 b = -4 e c = 3

Agora vamos calcular o discriminante da equação, ou seja, vamos calcular o valor de Δ.

Sabemos que $\Delta = b^2 - 4ac$ assim

$$\Delta = (-4)^2 - 4.1.3 = 16 - 12 = 4$$

Agora vamos usar a segunda parte da fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$. Assim teremos

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2.1} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

Aqui temos duas opções, um valor de x será calculado usando o sinal de + que aparece na conta acima e o outro valor de x será calculado usando o sinal de -. Vamos chamar esses valores de x_1 e x_2, respectivamente. Daí

$$x_1 = \frac{4 + 2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{4 - 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Portanto, as raízes da função $y = x^2 - 4x + 3$ são 1 e 3.

Outro exemplo: calcular as raízes da função $y = x^2 - 4x + 4$.

Solução:a = 1 b = -4 c = 4

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4.1.4 = 16 - 14 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{0}}{2.1} = \frac{4 \pm 0}{2}$$

$$x_1 = \frac{4+0}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

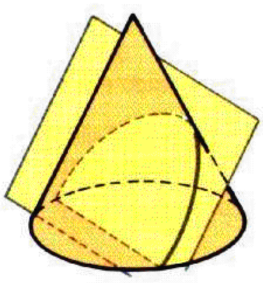
$$x_2 = \frac{4-0}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Portanto a raiz da função é 2.

2.2.2 – Gráfico da função polinomial do 2º grau

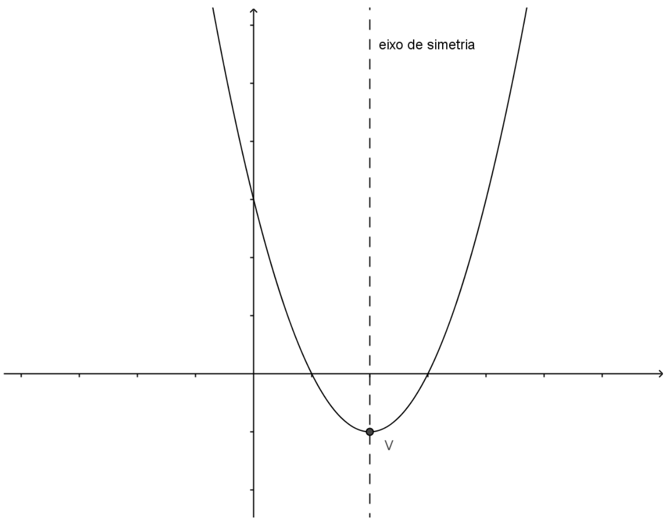
O gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma PARÁBOLA.

Uma parábola é uma curva que se obtém quando se faz a interseção de um cone com um plano paralelo a uma de suas geratrizes.



Fonte: http://www.resumosetrabalhos.com.br

A parábola é composta de dois ramos simétricos em relação a uma reta chamada eixo de simetria. O ponto V da parábola que pertence ao eixo de simetria é chamado de vértice da parábola.



As parábolas são curvas que aparecem, por exemplo, quando descrevemos a trajetória de uma bola quando lançada obliquamente para cima ou nas antenas parabólicas.

Para determinarmos o ponto V= (x_v, y_v),ou seja, o vértice da parábola, vamos usar as fórmulas

$$\boxed{x_V = \frac{-b}{2a}\,; y_V = \frac{-\Delta}{4a}}$$

Exemplo: Calcular as coordenadas do vértice da parábola que representa a função

$$y = x^2 - 4x + 3$$

Solução: a = 1b = -4 e c = 3

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

assim

$$\Delta = (-4)^2 - 4.1.3 = 16 - 12 = 4$$

$$x_V = \frac{-b}{2a} \;\; ; y_V = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$x_V = \frac{-(-4)}{2.1} = \frac{4}{2} = 2 \quad ; y_V = \frac{-4}{4.1} = \frac{-4}{4} = -1$$

Logo V = (2, -1) é o vértice da parábola.

2.2.3 - Construção do gráfico da função do 2ºgrau

Para construirmos o gráfico da função $y = ax^2 + bx + c$ podemos proceder de duas maneiras diferentes. A seguir vamos mostrar essas maneiras através de exemplos.

1ª maneira: Atribuir valores para x e calcular os respectivos valores de y. Marcar os pontos obtidos num plano cartesiano e obter a parábola.

Exemplo: Construir o gráfico da função y = x^2 – 1.

Solução: Primeiro vamos escolher alguns valores para x. Esses valores podem ser, por exemplo, -3, -2, -1, 0, 1, 2 e 3. A seguir, calculamos os respectivos valores de y.

Para x = -3 temos y = $(-3)^2 - 1 = 9 - 1 = 8$

Para x = -2 temos y = $(-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$

Para x = -1 temos y = $(-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

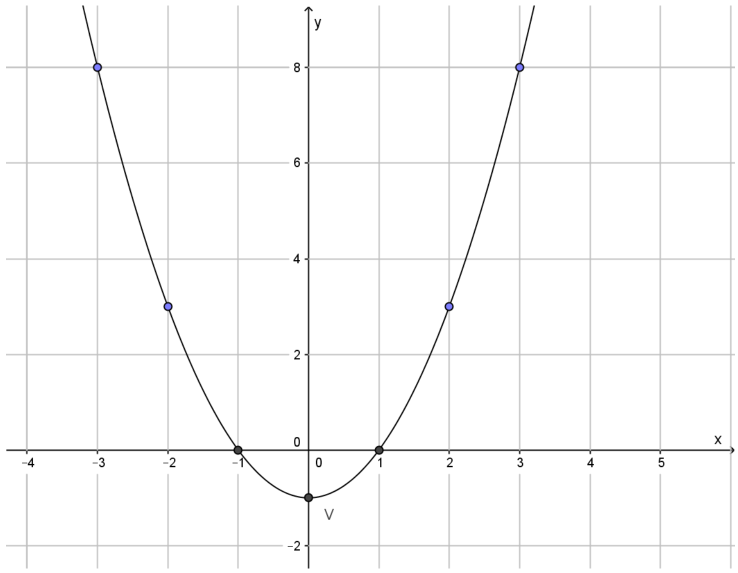
Para x = 0 temos y = $(0)^2 - 1 = 0 - 1 = -1$

Para x = 1 temos y = $(1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

Para x = 2 temos y = $(2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$

Para x = 3 temos y = $(3)^2 - 1 = 9 - 1 = 8$

x	y
-3	8
-2	3
-1	0
0	-1
1	0
2	3
3	8



2ª maneira: Determinar as raízes, o vértice e a interseção com o eixo y. Para a função $y = ax^2 + bx + c$ a interseção com o eixo y é o ponto (0,c).

Exemplo: Construir o gráfico da função $y = x^2 - 4x + 3$.

Solução:

1º passo: vamos determinar as raízes da função.Temos

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

a = 1 b = -4 e c = 3

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4.1.3 = 16 - 12 = 4$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2.1} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Logo as raízes são 1 e 3. Assim, a parábola passa pelos pontos (1,0) e (3,0).

2º passo: vamos determinar o vértice da parábola que representa a função.Temos

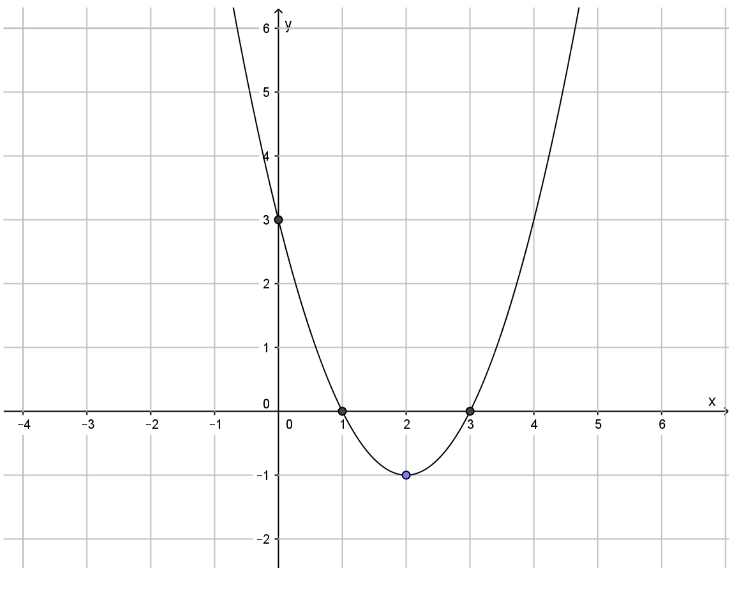
$$x_V = \frac{-b}{2a} \ ; y_V = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$x_V = \frac{-(-4)}{2.1} = \frac{4}{2} = 2 \qquad ; y_V = \frac{-4}{4.1} = \frac{-4}{4} = -1$$

Logo V = (2, -1) é o vértice da parábola.

3º passo: vamos determinar a interseção da parábola que representa a função com o eixo y. Como c = 3, temos que (0,3) é a interseção procurada.

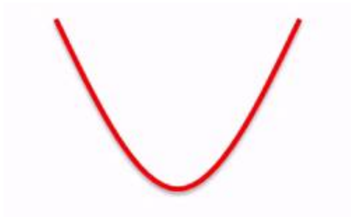
4º passo: vamos marcar os pontos obtidos nos cálculos acima num plano cartesiano e obter a parábola. Os pontos obtidos forma (1,0), (3,0), (2,-1) e (0,3).



Algumas observações importantes:

Considerando a função $y = ax^2 + bx + c$ temos

1)



a > 0
Concavidade para cima

a < 0
Concavidade para baixo

2)

a> 0 → o vértice é o ponto de mínimo da função

a< 0 → vértice é o ponto de máximo da função

3) O valor máximo ou mínimo da função é dado pelo y_v, ou seja, pela ordenada do vértice.

a> 0 → a função admite valor mínimo (y_v)

a< 0 → a função admite valor máximo (y_v)

Agora que vimos toda a teoria da unidade 3, você deverá fazer os exercícios propostos. É muito importante que você os faça em seu caderno. Bom trabalho!

Exercícios Propostos

Atenção: Faça os exercícios sempre em seu caderno. Não escreva na apostila

12) Construa o gráfico de cada função a seguir:

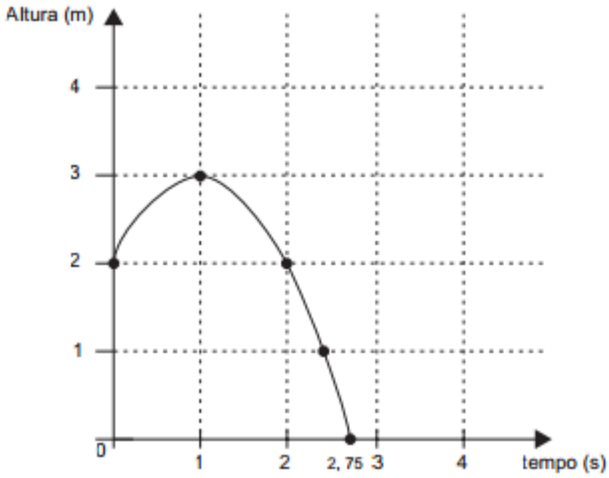
a) $y = 2x^2 - 8x + 6$
b) $y = x^2 + 4x$
c) $y = -x^2 + 4x - 3$
d) $y = x^2 - 4$
e) $y = x^2$

13) Calcule as coordenadas do vértice da parábola que representa cada função a seguir, diga se esse vértice é ponto de máximo ou de mínimo e identifique o valor máximo ou mínimo.

a) $y = x^2 - 5x + 6$ b) $y = -2x^2 + 4x$

14)(https://brainly.com.br) Um dardo é lançado da origem, segundo um referencial dado, e percorre a trajetória de uma parábola. A função que representa essa parábola é $y = -x^2 + 4x$. Quais são as coordenadas do ponto no qual esse dardo atinge sua altura máxima?

15)Um jogador sacou uma peteca que descreveu uma trajetória parabólica, como mostra a figura abaixo.



Nesse saque, qual foi a altura máxima atingida pela peteca?

a) 1 b) 2 c)3 d) 4

16) (mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/problemas-envolvendo-funcoes-1-grau.htm) Um motorista de táxi cobra R$ 3,50 de bandeirada (valor fixo) mais R$ 0,70 por quilômetro rodado (valor variável). Com base nos dados determine:

a) a função que define o valor a ser cobrado por corrida.

b) o valor a ser pago por uma corrida relativa a um percurso de 18 quilômetros.

17) (UNEP 2001)O preço de venda de um livro é de R$ 25,00 a unidade. Sabendo que o custo de cada livro corresponde a um valor fixo de R$ 4,00 mais R$ 6,00 por unidade, construa uma função capaz de determinar o lucro líquido (valor descontado das despesas) na venda de x livros, e o lucro obtido na venda de 500 livros.

18) (https://brainly.com.br) O salário de um vendedor é composto de uma parte fixa no valor de R$ 800,00, mais uma parte variável de 12% sobre o valor de suas vendas no mês. Caso ele consiga vender R$ 450.000,00, calcule o valor de seu salário.

19) (UNIFORM) O gráfico da função f, de R em R, definida por $f(x) = x^2 + 3x - 10$, intercepta o eixo das abscissas nos pontos A e B. A distância AB é igual a:

a) 3 b) 5 c) 7 d) 8 e) 9

20) (CEFET – BA) O gráfico da função $y = ax^2 + bx + c$ tem uma só intersecção com o eixo Ox e corta o eixo Oy em (0, 1). Então, os valores de a e b obedecem à relação:

a) $b^2 = 4.a$ b) $-b^2 = 4.a$ c) $b = 2.a$ d) $a^2 = -4.a$ e) $a^2 = 4b$

21) (UEL) A função real f, de variável real, dada por $f(x) = -x^2 + 12x + 20$, tem um valor:

a) mínimo, igual a -16, para x = 6;
b) mínimo, igual a 16, para x = -12;
c) máximo, igual a 56, para x = 6;
d) máximo, igual a 72, para x = 12;
e) máximo, igual a 240, para x = 20.

22) (PUC – MG) O lucro de uma loja, pela venda diária de x peças, é dado por L(x) = 100 (10 – x) (x – 4). O lucro máximo, por dia, é obtido com a venda de:

a) 7 peças
b) 10 peças
c) 14 peças
d) 50 peças
e) 100 peças

23) (UE – FEIRA DE SANTANA) Considerando-se a função real $f(x) = -2x^2 + 4x + 12$, o valor máximo desta função é:

2.3-PROGRESSÃO ARITMÉTICA E PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Sequência: é todo conjunto ou grupo no qual os seus elementos estão escritos em uma determinada ordem.

Exemplo

•(2, 4, 6, 8, 10, 12, ...) é uma sequência de números pares positivos.
•(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11...) é uma sequência de números naturais.
•(10, 20, 30, 40, 50...) é uma sequência de números múltiplos de 10.
•(10, 15, 20, 30) é uma sequência de números múltiplos de 5, maiores que cinco e menores que 35.

Há dois tipos de sequência:

• Sequência finita é uma sequência numérica na qual os elementos têm fim o último elemento é representado por a_N e a letra N determina o número de elementos da sequência.

• Sequência infinita é uma sequência que não possui fim, ou seja, seus elementos seguem ao infinito, por exemplo: a sequência dos números naturais.

Em uma sequência numérica qualquer, o primeiro termo é representado por a_1, o segundo termo é a_2, o terceiro a_3 e assim por diante.

$(a_1, a_2, a_3, a_4, ... , a_n, ...)$ sequência infinita.

$(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_N)$ sequência finita.

Em toda a **sequência numérica** temos **o n-ésimo** termo, também chamado de **termo geral (a_n)** . O termo geral da sequência numérica pode ser encontrado por meio de uma **lei de formação**, que é uma função com a qual conseguimos encontrar todos os termos da **sequência numérica**

2.3.1 -PROGRESSÃO ARITMÉTICA (PA)

Progressão aritmética é um tipo de sequência numérica que a partir do segundo elemento cada termo (elemento) é a soma do seu antecessor por uma constante.
Exemplo:
(5,7,9,11,13,15,17) essa sequência é uma Progressão aritmética, pois os seus elementos são formados pela soma do seu antecessor com a constante 2.
$a_1 = 5$
$a_2 = 5 + 2 = 7$
$a_3 = 7 + 2 = 9$
$a_4 = 9 + 2 = 11$
$a_5 = 11 + 2 = 13$
$a_6 = 13 + 2 = 15$
$a_7 = 15 + 2 = 17$

Essa constante é chamada de razão e representada por r. Dependendo do valor de r a progressão aritmética pode ser crescente, constante ou decrescente.

P.A crescente: r > 0, então os elementos estarão em ordem crescente.

Exemplo: $(9,14,19,24,\ldots)\begin{cases} a_1 = 9 \\ r = 5 \end{cases}$

P.A constate: r = 0, então os elementos serão todos iguais.

Exemplo: $(-3,-3,-3,-3,\ldots)\begin{cases} a_1 = -3 \\ r = 0 \end{cases}$

P.A decrescente: r < 0, então os elementos estarão em ordem decrescente.

Exemplo: $(6,2,-2,-6,-10,\ldots)\begin{cases} a_1 = 6 \\ r = -4 \end{cases}$

2.3.2.1- Termo Geral de uma PA

O termo geral de uma PA é calculado utilizando a seguinte fórmula:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)\cdot r}$$

Exemplo: Calcule o 16º termo de uma PA, sabendo que $a_1 = -10$ e r = 3.
$a_n = a_1 + (n – 1) . r$
$a_{16} = -10 + (16 – 1) . 3$

$a_{16} = -10 + 15 . 3$
$a_{16} = -10 + 45$
$a_{16} = 35$

O 16º termo de uma PA é 35.

2.3.2.2 Soma de PA finita

Somar o primeiro e o último termo e multiplicar pela metade do total de termos:

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}}$$

Exemplo: Na sequência numérica (–1, 3, 7, 11, 15, ...), determine a soma dos 20 primeiros termos.

Cálculo da razão da PA

$r = 3 - (-1) = 3 + 1 = 4$
$r = 7 - 3 = 4$
$r = 11 - 7 = 4$
$r = 15 - 11 = 4$

Determinando o 20º termo da PA

$a_{20} = -1 + (20 - 1) \cdot 4$
$a_{20} = -1 + 19 \cdot 4$
$a_{20} = -1 + 76$
$a_{20} = 75$

Soma dos termos

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot n}{2} = \frac{(-1 + 75) \cdot 20}{2}$$

$$S_{20} = \frac{74 \cdot 20}{2}$$

$$S_{20} = 740$$

A soma dos 20 primeiros termos da PA (–1, 3, 7, 11, 15, ...) equivale a 740.

2.4 - PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Denominamos de progressão geométrica, ou simplesmente PG, a toda sequência de números não nulos em que cada um deles, multiplicado por um número fixo, resulta no próximo número da sequência. Esse número fixo é chamado de razão da progressão e os números da sequência recebem o nome de termos da progressão.

Observe estes exemplos:
8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024 é uma PG de 8 termos, com razão 2.
5, 15, 45,135 é uma PG de 4 termos, com razão 3.
3000, 300, 30, 3 é uma PG de 4 termos, com razão 1/10

2.4.1 - Fórmula do termo geral

$$\boxed{a_n = a_1 . q^{(n-1)}}$$

Exemplo:

a) Dada a PG (2,4,8,...), pede-se calcular o décimo termo.

Temos:

$a_1 = 2$,

$q = 4/2 = 8/4 = ... = 2$.

Para calcular o décimo termo, ou seja, a_{10} vem pela fórmula:

$a_{10} = a_1 . q^{(10-1)} = a_1 .q^9 = 2 . 2^9 = 2. 512 = 1024$

b) Sabe-se que o quarto termo de uma PG crescente é igual a 20 e o oitavo termo é igual a 320. Qual a razão desta PG?

Temos

$a_4 = 20$

$a_8 = 320$

Logo, podemos escrever:

$$\begin{cases} a_4 = a_1 \cdot q^{(4-1)} = a_1 \cdot q^3 \\ a_8 = a_1 \cdot q^{(8-1)} = a_1 \cdot q^7 \end{cases}$$

dividindo :

$$\frac{a_8}{a_4} = \frac{a_1 \cdot q^7}{a_1 \cdot q^3} = \frac{q^7}{q^3} = q^{7-3} = q^4$$

$$\frac{320}{20} = q^4$$

$$q^4 = 16$$

$$q^4 = 2^4$$

$$q = 2$$

Decompondo 16 em números primos:

16	2
8	2
4	2
2	2
1	

$16 = 2^4$

2.4.2 - Soma de PG finita

Progressão geométrica finita é uma PG que tem um número determinado de elementos. Por exemplo, a sequência (3,6,12,24,48) é uma PG de razão igual a q = 2.

A soma dos temos dessa PG será 3 + 6 + 12 + 24 + 48 = 93

Uma fórmula para se obter a soma dos n elementos de uma PG finita é:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{(q-1)}}$$

Exemplo: Dê a soma dos termos da seguinte PG (7,14,28, ... , 3584).

Para utilizarmos a fórmula da soma é preciso saber quem é o 1º termo, a razão e a quantidade de elementos que essa PG possui.

$a_1 = 7$
$q = 2$
$n = ?$

Portanto, é preciso que encontremos a quantidade de elementos que possui essa PG, utilizando a fórmula do termo geral.

$a_n = a_1 . q^{n-1}$
$3584 = 7 . 2^{n-1}$
$3584 : 7 = 2^{n-1}$
$512 = 2^{n-1}$ Decompondo 512 obtemos $512 = 2^9$
$2^9 = 2^{n-1} \rightarrow$ $n - 1 = 9$
$n = 10$

Cálculo da soma:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{(q - 1)}$$

$$S_{10} = \frac{7 \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1} = \frac{7 \cdot (2^{10} - 1)}{1}$$

$$S_{10} = 7 \cdot (2^{10} - 1)$$

3.4.3 – Soma de PG infinita

$$\boxed{S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}}$$

Desde que ***– 1 < q < 1.***

Exemplo: Determine a soma dos elementos da seguinte PG:

$$25 + 5 + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \ldots$$

$a_1 = 25$
$q = 1/5$
Substituindo na fórmula:

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow \frac{25}{1 - \frac{1}{5}} \Rightarrow \frac{25}{\frac{4}{5}} \Rightarrow 25 * \frac{5}{4} \Rightarrow 31{,}25$$

Exemplo: A expressão matemática da soma dos termos de uma PG infinita é recomendada na obtenção da **fração geratriz** de uma dízima periódica simples ou composta. Observe a demonstração.
Considerando a dízima periódica simples 0,222222 ..., vamos determinar sua fração geratriz.

$$0{,}222222\ldots = 0{,}2 + 0{,}02 + 0{,}002 + 0{,}0002 = \frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{2}{10000} + \ldots =$$

$$\frac{2}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \ldots,$$

$$a_1 = \frac{2}{10}$$

$$q = \frac{1}{10}$$

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow \frac{\frac{2}{10}}{1-\frac{1}{10}} \Rightarrow \frac{\frac{2}{10}}{\frac{9}{10}} \Rightarrow \frac{2}{10} * \frac{10}{9} \Rightarrow \frac{2}{9}$$

Portanto: 0,22222... = 2/9

Exercícios:

24) Numa progressão aritmética de primeiro termo 1/3 e razão 1/2, a soma dos n primeiros termos é 20/3. Qual é o valor de n ?

25) A soma dos 10 primeiros termos de uma progressão aritmética é 185 e a soma dos 12 primeiros é 258. Calcule o 1º termo e a razão

26) Um estacionamento cobra R$1,50 pela primeira hora. A partir da segunda, cujo valor é R$1,00 até a décima segunda, cujo valor é R$ 0,40, os preços caem em progressão aritmética. Se um automóvel ficar estacionado 5 horas nesse local, quanto gastará seu proprietário?

27) Uma progressão aritmética de n termos tem razão igual a 3. Se retirarmos os termos de ordem ímpar, os de ordem par formarão uma progressão.

a) aritmética de razão 2

b) aritmética de razão 6

c) aritmética de razão 9

d) geométrica de razão 3

e) geométrica de razão 6

28) Um terreno vale hoje A reais e esse valor fica 20% maior a cada ano que passa (em relação ao valor de um ano atrás). Daqui a quantos anos aproximadamente o valor do terreno triplica?

29) Seja (a_1, a_2, a_3, ...) uma progressão geométrica infinita de razão a□, 0 < a < 1, e soma igual a 3a□. A **soma dos três primeiros** termos desta progressão geométrica é:

a) 8/27

b) 20/27

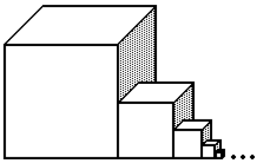
c) 26/27

d) 30/27

e) 38/27

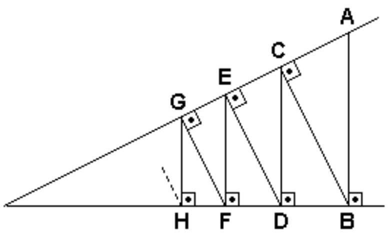
30) Várias tábuas iguais estão em uma madeireira. A espessura de cada tábua é 0,5 cm. Forma-se uma pilha de tábuas colocando-se uma tábua na primeira vez e, em cada uma das vezes seguintes, tantas quantas já houveram sido colocadas anteriormente.

31) Na figura abaixo, a aresta do cubo maior mede a, e os outros cubos foram construídos de modo que a medida da respectiva aresta seja a metade da aresta do cubo anterior. Imaginando que a construção continue indefinidamente. Qual é a soma dos volumes de todos os cubos?



32) Determine a fração geradora da dízima periódica 0,555...

33) Na figura, AB e BC medem, respectivamente, 5 e 4. Então o valor mais próximo da medida de AB+BC+CD+ED+EF+... é:



a) 17

b) 19

c) 21

d) 23

e) 25

Gabarito

1)a)À medida em que aumenta o tempo o volume de água no reservatório aumente. São grandezas diretamente proporcionais.

b) Sim, a relação entre as grandezas volume v de água e tempo t é uma função, pois a cada valor de t corresponde um único valor para v.

2)a) s = 1000 + $\frac{18}{100}x$ onde s representa o salário e x o valor das vendas

b) R$2800,00

3) a) y = 125000 + 1000x

b) 135000

4) R$474,00

5)a) R$14,50 b) 15km

6) letra e

7) letra d

8)a) a = 1 b = 5 crescente raiz = -5

b) a = -2b = 4   decrescente raiz = 2

c)a = 5 b = 0   crescente raiz = 0

d) a = -3b = 0   decrescente raiz = 0

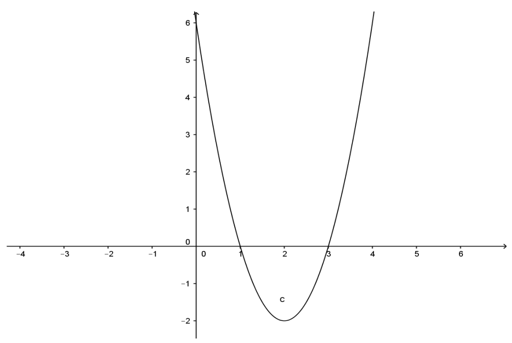
e) a = 2/3b = 0   crescente raiz = 0

9) letra b

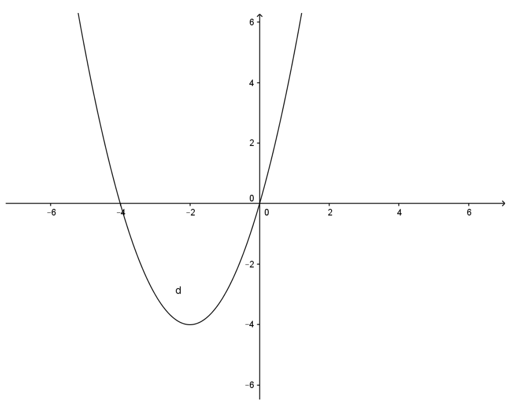
10) letra d

11) letra a

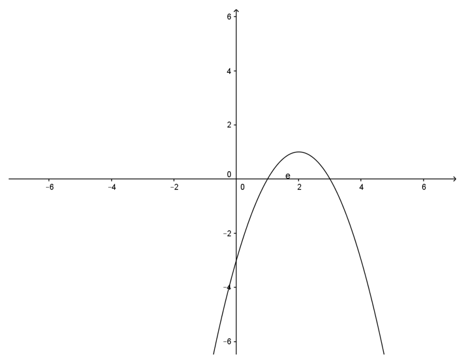
5) a)



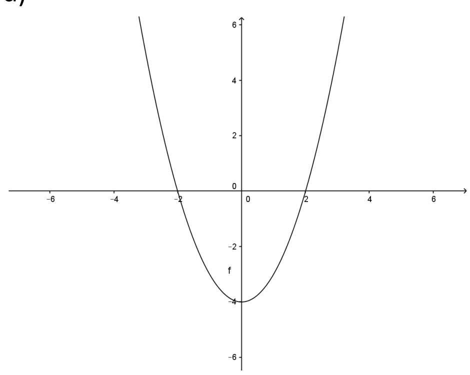
b)



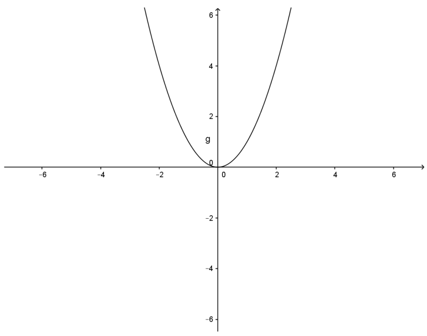
c)



d)



e)



13)a)$\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ ponto de mínimo

b) (2,4) ponto de máximo

14)(2,4)

15) letra c

16) a) f(x)=0,70x+3,50 b) R$ 16,10

17) L(x)=19x-4; R$ 9.496,00

18) R$ 54.800,00

19) C

20) A

21) C

22) A

23) E

24) n = 5
25) a_1 = 5 e r=3
26) R$ 5,14
27) B
28) Daqui a 6 anos aproximadamente.wq
29) E
30) 1,28 m
31) 8.a^3/7
32) 5/9
33) E

Referências bibliográficas:

DANTE. Matemática. Contexto e Aplicações. Volume único. Editora Ática. 2004.
GIOVANNI, José Ruy. BONJORNO, José Roberto. Matemática-uma nova abordagem. Editora FTD, 2000. Vol. 1,2,3.
SMOLE, Kátia Stocco. Matemática. Ensino Médio. Vol. I, II, III. Ed. Saraiva, 2003.
SOUZA, Joamir, Matemática-Novo Olhar. Ensino Médio. Vol. 1, 2, 3. Ed. FTD. 2010.
https://www.educacao.mg.gov.br/politica-de-privacidade/page/15089-supletivo
http://www.resumosetrabalhos.com.br
https://brainly.com.br
http://exercicios.mundoeducacao.bol.uol.com.br
www.mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/problemas-envolvendo-funcoes-1-grau.htm